HÀN LIÊN HẢI - NGÔ LONG HẬU
MAI TRƯỜNG GIÁO - HOÀNG NGỌC ANH

500 BÀI TOÁN CHỌN LỌC 10

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

HÀN LIÊN HẢI – NGÔ LONG HẬU
MAI TRƯỜNG GIÁO – HOÀNG NGỌC ANH

500 BÀI TOÁN
CHỌN LỌC
10

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ HỘI

Phần I

ĐỀ BÀI

1 MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

I - MỆNH ĐỀ

1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề ? Nếu là mệnh đề, xét tính đúng (Đ), sai (S).

a) "Số 77 là số nguyên tố".

b) "Tứ giác có hai cạnh đối bằng nhau là hình bình hành".

c) "$-a$ là một số âm".

2. Các câu sau có là mệnh đề ? Nếu là mệnh đề hãy phát biểu mệnh đề phủ định tương ứng.

a) "Hiệu độ dài hai cạnh của một tam giác nhỏ hơn độ dài cạnh thứ ba".

b) "Phương trình $x^2 - x - 15 = 0$ vô nghiệm".

3. Dùng các kí hiệu $\forall$, $\exists$ để viết lại các mệnh đề :

a) A : "Tổng hai số thực không thay đổi khi ta đổi chỗ các số hạng".

b) B : "Tồn tại một số thực mà bình phương bằng -3".

Xét sự Đ, S của A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$.

4. Lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và xét tính Đ, S của chúng.

a) A : "Bình phương của mọi số thực là số không âm".

b) B : "$\exists x \in R, x^2 + 1 = 0$"

c) C : "$\forall k \in Z$, $k(k+1)(k+2) \vdots 3$"

5. Mệnh đề sau là loại mệnh đề gì ? Xét tính Đ, S.

"Nếu hai tam giác đồng dạng thì diện tích của chúng không bằng nhau".

6. Phân tích mệnh đề : "Nếu ΔABC là tam giác đều thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là giao điểm 3 đường cao" dưới dạng "$A \Rightarrow B$".

7. Cũng câu hỏi như bài 6 với mệnh đề : "Số nguyên tận cùng bằng 9 thì chia hết cho 3".

8. Cho cặp mệnh đề :

A : "Tứ giác ABCD là hình chữ nhật".
B : "Tứ giác ABCD có hai đường chéo bằng nhau"

a) Có thể phát biểu định lý toán học nào ?

b) Dùng thuật ngữ : "điều kiện cần", "điều kiện đủ" để diễn đạt quan hệ giữa A và B.

c) Có thể dùng "điều kiện cần và đủ" để diễn đạt quan hệ A, B được không ?

9. Cũng hỏi như bài 8 đối với cặp mệnh đề :

a) P : "Tứ giác ABCD là hình bình hành có hai cạnh liên tiếp bằng nhaau".

b) Q : "Tứ giác ABCD là hình thoi".

Trong trường hợp này có dùng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" được không ?

10. Cũng hỏi như bài 9 với cặp mệnh đề :

C : "Số tự nhiên n chia hết cho 5"

D : "Số tự nhiên n tận cùng bằng 0".

11. Các mệnh đề sau Đ hay S (giải thích)

a) Tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi nó có các cặp cạnh đối bằng nhau.

b) Các cặp cạnh đối bằng nhau là điều kiện cần và đủ để tứ giác là hình bình hành.

c) Hai cạnh đối bằng nhau là điều kiện cần để tứ giác là hình bình hành.

d) Hai cạnh đối bằng nhau là điều kiện cần và đủ để tứ giác là hình bình hành.

12. Dựa vào tiêu chuẩn nhận biết tứ giác lồi là hình bình hành đã học, phát biểu các điều kiện cần và đủ để tứ giác lồi là hình bình hành.

13. Cũng hỏi như bài 13 với hình chữ nhật.

14. Cũng hỏi như bài 13 với hình thoi.

15. Phát biểu các điều kiện cần và đủ để hình bình hành là hình chữ nhật.

16. Cũng hỏi như bài 15 với hình thoi.

17. Cũng hỏi như bài 15 với hình vuông.

18. Chứng minh trực tiếp mệnh đề : $\forall k \in \mathbf{Z}$, $k^2 + k + 1$ là số lẻ".

19. Chứng minh bằng phản chứng mệnh đề "Nếu $a + b < 2$ ($a, b \in \mathbf{R}$) thì một trong hai số a hoặc b nhỏ hơn 1".

20. Mệnh đề đảo của mệnh đề trong bài 19 có phải là định lý không ?

II – CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

21. Kí hiệu : A : Tập hợp học sinh trường THPT X.

B : Tập hợp học sinh lớp 10A trường X.

C : Tập hợp học sinh lớp 10 trường X.

D : Tập hợp các lớp học của trường X.

Các câu và các kí hiệu sau đúng hay sai ?

a) Một học sinh của trường X là một phần tử của A.

b) Một học sinh của trường X là một phần tử của B.

c) Một học sinh của trường X là một phần tử của C.

d) Một lớp học của trường X là một phần tử của A.

e) Một lớp học của trường X là một phần tử của D.

f) Lớp 10A là một phần tử của A.

g) $B \subset A$

k) $D \subset A$

i) $C \subset D$

22. Các câu sau đúng hay sai ?

a) Châu Âu là thành viên của Liên hiệp quốc (LHQ).

b) Việt Nam là thành viên của LHQ.

c) Hội đồng bảo an của LHQ là một thành viên của LHQ.

d) Tổng thư ký LHQ là một thành viên của LHQ.

23. Làm thế nào để cho "tập hợp học sinh trong tổ học tập" của bạn ?

24. Liệt kê các phần tử của tập hợp sau :

a) $A = \{x \in R / x^2 - 1 = 0\}$

b) $B = \{x \in Z / x^3 - 3x + x + 1 = 0\}$

c) $C = \{x \in N / 3x^2 - 2x - 1 = 0\}$

d) $D = \{x \in R / 3x^2 + 2x - 1 = 0\}$

e) $E = \{x \in N / x < 20$; x chia cho 3 dư 1$\}$

f) $F = \{x \in Z / |x| < 7\}$

25. Cho các tập hợp sau :

A : Tập hợp các tứ giác lồi
B : Tập hợp các hình bình hành
C : Tập hợp các hình thoi
D : Tập hợp các hình chữ nhật
E : Tập hợp các hình vuông
F : Tập hợp các tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn.

a) Xác định quan hệ bao hàm (nếu có) giữa từng đôi trong các tập hợp trên.

b) Xác định $C \cap D$; $B \cap F$; $B \setminus (C \cup D \cup E)$

26. Cho các cặp tập hợp :

a) $A = \{x \in R \mid x^2 + 1 = 0\}$ và $B = \{0\}$

b) $C = \{x \in N \mid x \vdots 9\}$ và $D = \{x \in N \mid x \vdots 3\}$

c) $E = \{x \in Z \mid x \vdots 6\}$ và $F = \{x \in N \mid x \vdots 2$ và $x \vdots 3\}$

Tìm hợp, giao, hiệu của các tập hợp trong mỗi cặp.

27. Xác định các tập hợp con của các tập hợp sau :

a) $A = \{a_1 ; a_2 ; a_3\}$ b) $B = \{0\}$

c) $C = \varnothing$ d) $D = \{x \in Z \mid -2 \leq x < 3\}$

28. a) Biểu diễn trên trục số thực các tập hợp số thực sau :

$[-2 ; 3)$; $B = (-2 ; 3]$; $C = (-\infty ; -2]$; $D = (-2 ; 3)$; $E = [-2 ; 3]$; $F = [3 ; +\infty)$

b) Tìm hợp, giao, hiệu của từng đôi một trong các tập hợp trên.

29. Cho các tập hợp số thực :

$$A = [-3 ; +\infty) ; B = (2 ; 10] ; C = (-5 ; 0)$$

Xác định và biểu diễn trên trục số : $A \cup B$; $A \cap B \cap C$; $(B \cup C) \cap A$

30. Mỗi tập con của tập số thực đều có thể biểu thị dưới dạng một hoặc nhiều bất đẳng thức :

Thí dụ : $[1 ; 5) = 1 \leq x < 5$

$(1 ; +\infty) = x > 1$

Hãy biểu thị dưới dạng bất đẳng thức các tập số thực sau và biểu diễn chúng trên trục số :

a) $(-\infty ; -10)$; b) $(-\infty ; 10]$; c) $(-2 ; 5)$; d) $(-3 ; +\infty)$; e) $[-1 ; 15]$.

31. Biểu thị dưới hình thức khoảng, nửa khoảng, đoạn các tập số thực sau :

a) $x < \frac{2}{3}$ b) $x \geq \frac{2}{3}$; c) $2 < x < 10$; d) $-1 \leq x \leq 4$ e) $1 < x \leq 4$

32. Đối với các tập hợp số thực, người ta thường dùng kí hiệu

$$\begin{cases} A \\ B \end{cases} \text{ thay cho } A \cap B$$

Chẳng hạn : $$\begin{cases} [1 ; 10] \\ (-3 ; 5) \end{cases} = [1 ; 10] \cap (-3 ; 5) = [1 ; 5)$$

hay $$\begin{cases} 1 \leq x \leq 10 \\ -3 < x < 5 \end{cases} = 1 \leq x < 5$$

Cũng có thể ký hiệu như vậy với nhiều tập hợp

Chẳng hạn : $$\begin{cases} 1 \leq x \leq 10 \\ -3 < x < 5 = 1 \leq x < 5 \\ x > 0 \end{cases}$$

Áp dụng : Thực hiện các phép toán sau và biểu diễn kết quả trên trục số :

a) $\begin{cases} (-2 ; +\infty) \\ (-\infty ; 3) \end{cases}$ b) $\begin{cases} [-5 ; 3) \\ [1 ; 2] \end{cases}$ c) $\begin{cases} (-5; 4) \\ (10 ; +\infty) \\ (-3 ; +\infty) \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \leq 1 \\ -2 < x < 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -10 \leq x \leq 3 \\ x \geq 0 \\ x < 2 \end{cases}$

33. Đối với các tập hợp số thực, người ta còn thường dùng ký hiệu $\left[\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right.$ thay cho $A \cup B$

Chẳng hạn $$\left[\begin{array}{l} (1 ; 10) \\ (5 ; +\infty) \end{array}\right. = (1 ; 10) \cup (5 ; +\infty) = (1 ; +\infty)$$

hay $$\left[\begin{array}{l} (1 < x < 10) \\ x > 5 \end{array}\right. = x > 1$$

Áp dụng : Thực hiện các phép toán sau :

a) $\left[\begin{array}{l}(1;4]\\(-2;3)\end{array}\right.$ b) $\left[\begin{array}{l}(-\infty;1]\\(2;5)\\{[5;+\infty)}\end{array}\right.$

c) $\left[\begin{array}{l}x\le 3\\-5<x<5\end{array}\right.$ d) $\left[\begin{array}{l}-10<x<0\\x\ge 3\\1\le x\le 9\end{array}\right.$

34. Thực hiện các phép toán sau :

a) $\begin{cases}\begin{cases}x<1\\x\ge -2\end{cases}\\x<3\\x\le 1\end{cases}$ b) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<5\\x<4\end{cases}\\\begin{cases}x>3\\1<x<4\end{cases}\end{array}\right.$

35. Thực hiện các phép toán sau :

a) $\begin{cases}\mathbb{R}\\(-5;1)\\(-\infty;-2]\end{cases}$ b) $\begin{cases}1<x\le 3\\x\ge 2\\\varnothing\end{cases}$

36. Thực hiện các phép toán sau :

a) $\begin{cases}(0;+\infty)\\(2;3)\\(5;+\infty)\end{cases}$ b) $\begin{cases}|x|<5\\\left[\begin{array}{l}x<1\\x>5\end{array}\right.\end{cases}$

37. a) Điền các dấu $\cup$, $\cap$, $\setminus$ vào chỗ trống cho phù hợp

$[-1;+\infty)\ \ldots\ [-3;4)\ \ldots$ $(0;+\infty)=[-3;0]$

b) Có thể nói gì về số a nếu $[3,12]\cap(-\infty;a)=\varnothing$

c) Cho $A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Có bao nhiêu tập con của A gồm 3 phần tử trong đó có phần tử 0 ? Viết các tập hợp đó.

38. Xác định phần bù của các tập hợp sau trong R.

a) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid 2x-3\geq 10\}$ b) $B=\{x\in\mathbf{R}\mid |x|\geq 3\}$

39. Trong hình học phẳng, một tập hợp điểm E được gọi là lồi, nếu với mỗi cặp điểm M, N ∈ E, đoạn thẳng MN được chứa trong E.

a) Chứng tỏ rằng giao của hai tập hợp lồi là một tập hợp lồi.

b) Hợp của hai tập hợp lồi có phải là một tập hợp lồi không ?

40. Khối lớp 10 có 100 học sinh, có 42 học sinh thích môn Toán, 30 học sinh thích môn Văn, 38 học sinh thích môn tiếng Anh. Ngoài ra có 9 học sinh thích Văn và Toán, 7 học sinh thích Toán và Tiếng Anh, 10 học sinh thích Văn và Tiếng Anh. Có 3 học sinh thích cả 3 môn. Hỏi :

a) Có bao nhiêu học sinh chỉ thích một môn ?

b) Có bao nhiêu học sinh không thích môn nào ?

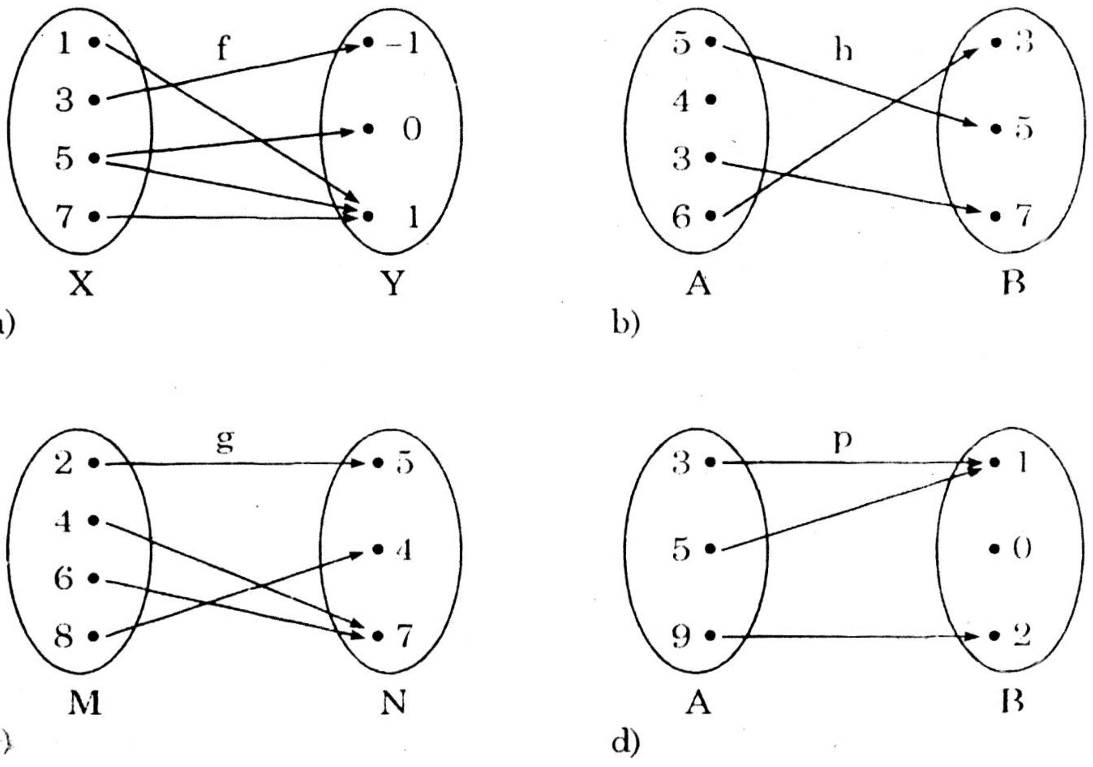
2 HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

HÀM SỐ

41. 1) Thế nào là hàm số f xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$. Cho ví dụ.

2) Thế nào là tập xác định của một hàm số. Cho ví dụ.

42. Trong các tương ứng f, g, h, p sau, tương ứng nào xác định một hàm số ?



Hình 1

43. 1) Cho hai tập hợp A = {5 ; −3 ; 0} và B = {0 ; 1}. Giữa tập A và B có tương ứng sau đây :

a) Tương ứng f xác định bởi cặp số sau :

(5 ; 0) ; (−3 ; 1) ; (0 ; 0)

b) Tương ứng h xác định bởi cặp số sau :

(5 ; 1) ; (−3 ; 0) ; (0 ; 1) ; (5 ; 0)

Vẽ sơ đồ mũi tên của f và g. Tương ứng nào cho ta một hàm số từ A đến B.

2) Cho hàm số f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to y = f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ 3x - 2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Tìm f(1), f(0), f(−2), f(−3).

44. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{8}{x - 10}$; b) $y = \sqrt{5 - x}$;

c) $y = \dfrac{2x - 3}{x^2 - x + 1}$; d) $y = \dfrac{1}{(x - 2)\sqrt{x - 1}}$

45. a) Tìm tập giá trị của các hàm số $y = x^2$.

b) Với giá trị nào của x thì hàm số y = 0.

$$y = 2x - 6 \ ; \ y = x^2 - 25$$

46. Cho hàm số $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính $f(-4)$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$, $f(5)$ và $f(-0{,}25)$.

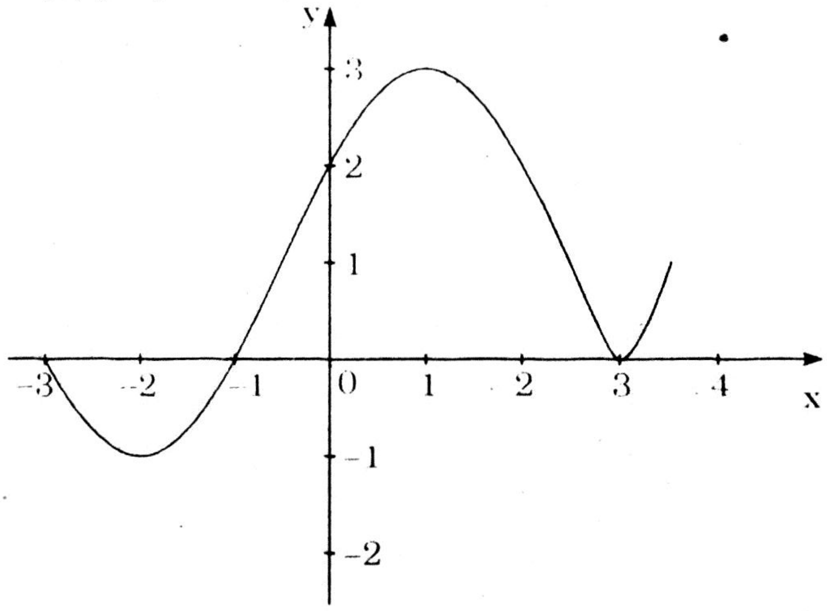
47. 1) Thế nào là đồ thị của hàm số y = f(x) với tập xác định $\mathscr{D}$. Cho ví dụ.

2) Cho đồ thị hàm số y = f(x) (h.2)

a) Từ đồ thị cho biết hàm số y = f(x) đồng biến, nghịch biến trên các khoảng nào ?

b) Tính theo đồ thị f(−3), f(−1), f(0), f(3), f(4).

c) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm y = f(x) trong khoảng (−3 ; 4).



Hình 2

3) Vẽ đồ thị hàm số $\text{sgn}x = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

48. 1) Thế nào là hàm số chẵn, hàm số lẻ. Cho ví dụ.

Đặc điểm đồ thị hàm số chẵn, hàm số lẻ.

2) Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau :

a) $y = x^3 + x$; b) $y = x^2 + x$;

c) $y = \sqrt{1 - x^2}$; d) $y = \sqrt{4 + x} + \sqrt{4 - x}$

49. Lập bảng biến thiên của các hàm số sau đây trong các khoảng đã chỉ ra

a) $y = x^2 + 3x - 4$; $\left(-\infty ; \frac{-3}{2}\right), \left(\frac{-3}{2} ; +\infty\right)$

b) $y = \frac{6}{x-1}$; $(-\infty; 1), (1 ; +\infty)$

c) $y = x^3 - 1$; $(-\infty ; +\infty)$

d) $= \sqrt{x^2+1}$; $(-\infty ; +\infty)$

50. Giả sử trên mặt phẳng toạ độ Oxy có tập hợp các điểm mà tọa độ của nó thỏa mãn đẳng thức $y = f(x)$ (bằng số). Có thể kết luận tập hợp các điểm đó là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ không ?

II - HÀM SỐ BẬC NHẤT

51. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất :

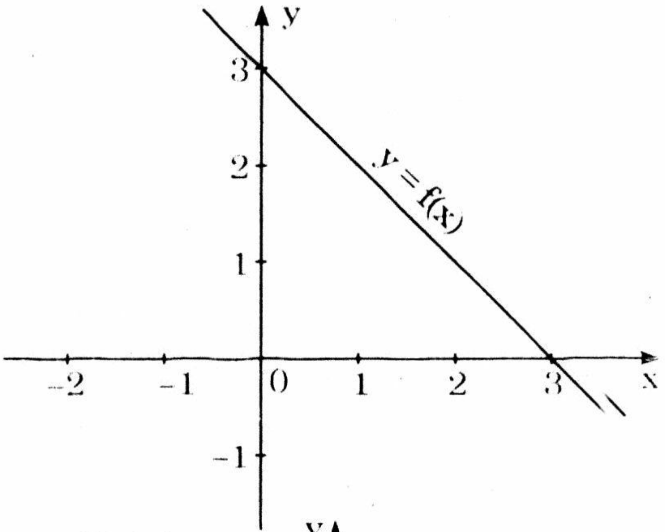
$$y = \text{sgn}x \; ; \; y = x^2 + 1 \; ; \; y = 3x \; ; \; y = \sqrt{x^2 - 1} \; ; \; y = -2x + 3$$

52. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng (h.3)

a) Tìm khoảng xác định của hàm số.

b) Hàm số đồng biến hay nghịch biến.

c) Xác định hàm số $y = f(x)$.



Hình 3

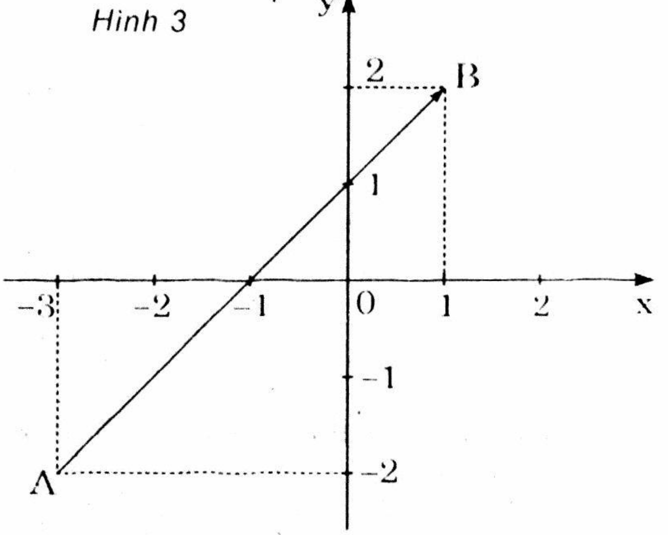
53. Các điểm trên đoạn thẳng AB là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tìm tập giá trị của hàm số.

c) Tính $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$.

d) Xác định hàm số biểu diễn đoạn AB.



Hình 4

54. 1) Vẽ đồ thị hàm số

$$y = \begin{cases} x + 3 & \text{với } x \le 0 \\ 3 & \text{với } 0 < x \le 3 \\ x & \text{với } x > 3 \end{cases}$$

2) Vẽ đồ thị các hàm số :

a) $y = 2|x| + 1$

b) $y = |2x + 1|$

c) $y = |x + 1| + |x - 1|$

55. Cho các điểm $A(-1 ; 1)$, $B(2 ; 3)$, $C(-3 ; 4)$.

a) Lập phương trình các cạnh AB, AC, BC.

b) Xác định toạ độ trực tâm H và trọng tâm G của tam giác ABC.

56. Cho hai đường thẳng $y = 2x + 2$ và $y = -x + 5$.

a) Xác định toạ độ giao điểm M của hai đường thẳng.

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng $x = 5$.

c) Viết phương trình đường thẳng đi qua M và song song với đường thẳng $y = -3x + 2$.

57. Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy :

$y = 2x$; $y = -x - 3$; $y = mx + 5$.

58. Sự tương quan giữa nhiệt độ C (nhiệt độ cenzius) và nhiệt độ F (nhiệt độ Farenhet) là một hàm số bậc nhất :

$$t_F = at_C + b$$

Nước đóng băng ở 32^0F và sôi ở 212^0F.

a) Xác định a, b.

b) Nhiệt độ 115^0F ứng với bao nhiêu độ C ?

59. Một máy gia tốc, một electron có vận tốc ban đầu $v_0 = 10000$ km/sec. Electron này được một lực tác động liên tục và vận tốc được cho bởi công thức :

$v = v_0 + 3200t$ (t tính bằng sec)

a) Tính vận tốc của electron sau 1sec, sau 10 sec.

b) Xác định thời gian cần thiết để vận tốc lên tới 120000 km/sec.

III - HÀM SỐ BẬC HAI

60. 1. Hàm số bậc hai có dạng như thế nào ? Cho ví dụ.

2. Cho điểm $M_0(1; 2)$. Hãy tịnh tiến điểm M_0

a) Theo phương của trục tung lên trên hoặc xuống dưới 3 đơn vị.

b) Theo phương của trục hoành sang phải hoặc sang trái 2 đơn vị.

61. 1. Phát biểu định lí về tịnh tiến đồ thị của một hàm số.

2. a) Vẽ đồ thị C của hàm số $y = x^2$.

b) Từ C suy ra đồ thị hàm số $y = x^2 + 4x + 2$.

62. Cho biết đường parabol $y = ax^2$ suy ra đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

63. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau :

a) $y = -x^2 + 2x + 3$; b) $y = 2x^2 + 3x + 2$;

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$

64. Xác định a, b để parabol có phương trình dưới đây có toạ độ đỉnh I :

a) $y = x^2 + ax + b$ $\quad$ I(0 ; 1)

b) $y = ax^2 + x + b$ $\quad$ I(1 ; –1)

c) $y = ax^2 + bx - 2$ $\quad$ I(1 ; 2)

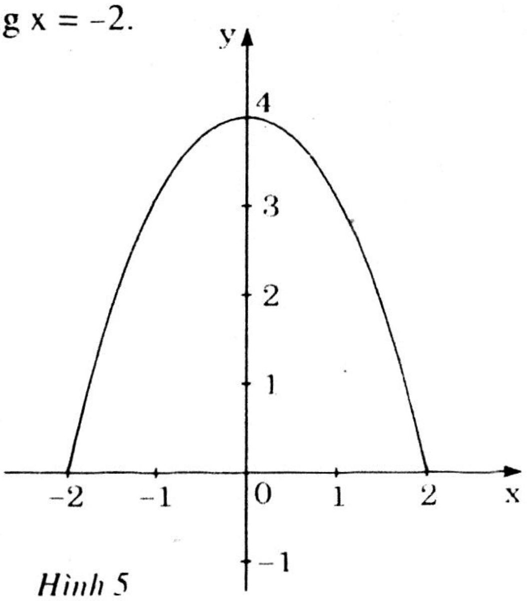
65. 1) Cho parabol $y = (x - a)(x - b)$. Xác định toạ độ đỉnh I theo a, b.

2) Xác định a, b của parabol $y = ax^2 + bx + 1$ biết rằng parabol này :

a) Đi qua hai điểm A(1 ; 3) và B(–2 ; 5).

b) Đi qua điểm M(3 ; –2) và có trục đối xứng x = –2.

66. Đại học Bách khoa Hà Nội có cái cổng parabol tương tự như (h. 5). Hãy xác định hàm số mà đồ thị là cái cổng parabol này.



Hình 5

67. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{3x+1}{x+1}$; $\quad$ b) $y = \sqrt{x^2+1}$;

c) $y = \sqrt{2x+1}$; $\quad$ d) $y = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x}}$;

e) $y = \sqrt[3]{5-x}$

68. Xác định tính chẵn lẻ của các hàm số sau :

a) $y = x(|x| - 4)$ $\quad$ b) $y = 2x^2 - 3|x| + 8$

69. Gọi D(m) là đường thẳng có phương trình $y = mx + 1 - m$ (m là tham số). Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng D(m) xoay quanh một điểm cố định.

70. Cho parabol (P) : $y = x^2 + x - 1$.

a) Điểm M(–1 ; –1) và điểm N(2 ; 3) có thuộc parabol (P) không ?

b) Qua điểm N viết phương trình đường thẳng (d) sao cho (d) và (P) có giao điểm kép.

71. Chứng minh rằng nếu $a \geq 0$ thì hàm số $y = x^3 + ax$ là một hàm số đồng biến.

72. Tìm tọa độ giao điểm đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = x^2 - 3$ $\quad$ và $\quad y = -\dfrac{3}{2}x - 2$

b) $y = x^2 - 2x$ $\quad$ và $\quad y = 2x - 3$

c) $y = -2x^2 - 3x + 1$ $\quad$ và $\quad y = 3x - 2$

73. a) Vẽ đồ thị hàm số $y = 3x^2 - 2|x| - 1$

b) Dựa vào đồ thị biện luận theo m nghiệm của phương trình

$$3x^2 - m = 2|x| + 1$$

c) Giả sử có hàm số $f(x) = x^2 - 7x + m$. Với giá trị nào của m thì $\min\limits_{[3;4]} f(x) = 2$?

3

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I - PHƯƠNG TRÌNH

74. 1. Thế nào là phương trình một ẩn. Cho ví dụ.

2. Điều kiện xác định (ĐKXĐ) của phương trình $f(x) = g(x)$ là gì, cho ví dụ.

3. Thế nào là hai phương trình tương đương, cho ví dụ.

75. Chứng minh định lí : Nếu phương trình $f(x) = g(x)$ với điều kiện xác định D và $h(x)$ là một biểu thức xác định với mọi x thuộc D ($h(x)$ có thể là hằng số) thì phương trình $f(x) = g(x)$ tương đương với phương trình $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ với điều kiện xác định D.

76. Chứng minh rằng phương trình $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$ là phương trình hệ quả của phương trình $f(x) = g(x)$.

77. 1. Cho phương trình $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2}{3}$

a) Tìm ĐKXĐ của phương trình.

b) Tìm nghiệm của phương trình.

2. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau :

a) $x + 3 = \dfrac{8}{x+1}$; b) $2x + 1 = \dfrac{8}{2x + 1}$

78. Cho phương trình $m(x + 1) = (m + 3)x - 5$

a) Với $m = -\dfrac{1}{2}$ giải phương trình đã cho.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm $x = 1$.

79. 1. Cho các cặp phương trình sau. Hãy chỉ ra những cặp phương trình tương đương, không tương đương.

a) $x + \dfrac{2}{x-1} = 4$ và $x(x - 1) + 2 = 4(x - 1)$

b) $x^2 - \dfrac{5}{x} = 4 - \dfrac{5}{x}$ và $x^2 = 4$

c) $\dfrac{2x^2 + x}{x} = 3$ và $2x + 1 = 3$

d) $x - a = 2$ và $(x - a)^2 = 4$.

2. Phương trình $|x - 9| = |x|$ và $(x - 9)^2 = x^2$ có tương đương không ? Suy ra cách giải phương trình này.

80. Giải các phương trình sau :

a) $\sqrt{-x} = \sqrt{x}$ b) $\sqrt{2x - 3} = \sqrt{3 - 2x} + 1$

c) $x - \sqrt{x - 1} = 1 - \sqrt{x - 1}$

II - PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

81. Giải và biện luận phương trình $ax + b = 0$.

82. Giải các phương trình sau :

a) $(13x - 15) - (9 + 6x) = -3x$ b) $12 - (4x - 18) = (36 + 4x) + (18 - 6x)$

c) $3x - (10 + 5x) = 54$.

83. Cho phương trình : $\dfrac{2a + 1}{x + 1} = a + 2$ (ẩn x)

a) Giải phương trình với $a = -1$.

b) Tìm a để phương trình vô nghiệm.

84. Tìm nghiệm của các phương trình sau :

a) $\dfrac{6y + 7}{4} + \dfrac{8 - 5y}{3} = 5$ b) $\dfrac{5x - 1}{3} = \dfrac{2x - 3}{5} - 1$

c) $\dfrac{3x - 1}{24} + \dfrac{2x + 5}{36} - 1 = 0$

85. Tìm nghiệm của các phương trình sau :

a) $(x + 1)(x - 5) = 0$ b) $(x - 1)(x - 4)(x + 3) = 0$

c) $(x^2 - 9)(x^2 - 4) = 0$

86. Giải và biện luận phương trình (ẩn x) :

a) $m(x + 1) = x - n$; b) $m(2x + 1) = nx + 1$

c) $|x + m| = |x - m + 2|$;

87. Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để nghiệm của phương trình $ax - 6 = 0$ là số nguyên.

88. Không giải phương trình $7(2x + 1) = 13$, chứng minh rằng nghiệm của phương trình không phải là số nguyên.

III - PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

89. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn ?

a) $3x - y = 15$; b) $x^2 - 2y = 5$;

c) $xy + 3 = 7$; d) $13x + 6y = 0$.

90. Trong các cặp giá trị của biến x và y cho trong bảng sau

x	–6	–5	–4	–3	–1	0	4	5	3
y	2	0	3	–4	–3	–5	–3	5	–1

cặp nào là nghiệm của phương trình :

a) $2x + y = 5$; b) $x + 3y = -5$?

91. Lập một phương trình bậc nhất hai biến x, y mà có nghiệm là cặp số :

a) $x = 1, y = 1{,}2$ b) $x = 2, y = -1$

92. a) Biểu diễn y qua x từ phương trình $5x - y = 7$ và tìm 3 nghiệm nguyên của phương trình.

b) Biểu diễn x qua y từ phương trình $5x + 8y = 3$.

93. Nêu các phép biến đổi tương đương hệ phương trình.

94. Giải hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x = 11 - 3y \\ 6y = 22 - 4x \end{cases}$

95. Tìm nghiệm của các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 5x - 4y = 1 \\ 3x + 1 = 13 \\ 7x - 5y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 11x + 3y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ 5x + 2y = \dfrac{22}{5} \end{cases}$

96. Giải và biện luận hệ phương trình :

a) $\begin{cases} (m - 1)x + 2y = 2m + 1 \\ mx - 3y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} kx + 4y = 4 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

97. Giải hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} |x| + y = 4 \\ x + 3|y| = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{(x + y)^2} = 5 \\ \sqrt{(x - y)^2} = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -3x + 4y + 2z = 11 \end{cases}$

98. 1. Một ôtô đi hết một quãng đường mất 8 giờ. Đầu tiên ôtô đi với vận tốc 40 km/giờ, sau đó nó đi với vận tốc 60 km/giờ. Hỏi ôtô đã đi bao nhiêu thời gian với vận tốc 40 km/giờ ? Bao nhiêu thời gian với vận tốc 60 km/giờ ? Biết rằng quãng đường đó dài 360 km.

2. Hãy tính tuổi của người anh và người em hiện nay. Biết rằng cách đây 2 năm tuổi của người anh gấp 2 lần tuổi của người em, còn sau 2 năm nữa tuổi người anh hơn tuổi của người em là 8 tuổi.

IV - PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

99. 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc hai một ẩn :

a) $2x + 3y = 4$; b) $3x^2 + 4x = -1$;

c) $xy + 5 = 1$; d) $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$;

e) $(2x + 3)(x - 1) = 2x(x + 7)$

2. Lập công thức nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$.

100. Giải các phương trình sau :

a) $8x^2 - 7x - 2{,}25 = 0$; b) $\frac{2}{3}x^2 + 3x - 1\frac{2}{3} = 0$;

c) $3x^2 - 11x + 6 = 0$; d) $\sqrt{3}x^2 - 2x - \sqrt{3} = 0$.

101. Tìm các giá trị của m để phương trình bậc hai ẩn x :

$$2x^2 + mx + m^2 - 5 = 0$$

a) Có nghiệm $x = 1$.

b) Có nghiệm $x = -1$.

c) Chỉ có một nghiệm.

102. Giải các phương trình với hệ số bằng chữ :

a) $3m^2x^2 - mx - 4 = 0$;

b) $(m + n)x^2 - 2mx + m - n = 0$ $(m + n \neq 0)$

c) $\dfrac{y}{m^2 - mn} + \dfrac{y}{my - 3m} + \dfrac{1}{y - 3} = \dfrac{m + 3}{(y - 3)(m - n)}$ $(m \neq n$ và $m \neq 0,\ m + n > 0))$

103. 1) Với giá trị nào của a thì phương trình sau vô số nghiệm :

$$(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x + a - a^2 = 0$$

2) Giải và biện luận phương trình :

a) $\dfrac{x}{m - 1} = \dfrac{2}{x + 1}$; b) $ax^2 = a + 1$; c) $2mx^2 - 2(\sqrt{2}m - 1)x + m = 0$

104. Giải phương trình :

a) $x^2 - |x| - 2 = 0$; b) $x^2 + 5|x| + 4 = 0$

105. Tìm các nghiệm của phương trình :

a) $2x^2 - |5x - 2| = 0$; b) $x^2 - |x - 1| = 0$

106. Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị

a) $x^2 - 2x + m = 1$; b) $x^2 - 2|x| + 1 = m$

V - ĐỊNH LÍ VIÉT VÀ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÍ VIÉT

107. 1. Phát biểu định lí Viét. Cho ví dụ.

2. Nêu một số ứng dụng của định lí Viét.

3. Không giải phương trình :

a) $x^2 + 5x - 3 = 0$;

b) $x^2 + x - 4 = 0$;

c) $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$

Hãy xác định tổng và tích của các nghiệm của mỗi một phương trình đã cho.

108. 1. Có thể khẳng định rằng với $m = 15$ thì các nghiệm của phương trình $x^2 + 16x + m = 0$ là 5 và 3 ?

2. Có thể khẳng định rằng với $p = 6$ thì các nghiệm của phương trình $x^2 + px + 8 = 0$ là -4 và -2 được không ?

109. Không giải phương trình $3x^2 + 5x - 1 = 0$. Hãy tính :

$$x_1^2 + x_2^2 \ ; \ x_1^3 + x_2^3 \ ; \ x_1^4 + x_2^4$$

110. Không giải phương trình, khảo sát dấu của các nghiệm (nếu có) của các phương trình :

a) $x^2 + 66 - 17x = 0$; b) $4x + x^2 + 3 = 0$;

c) $x^2 - 12x + 35 = 0$; d) $x^2 + 3x - 10 = 0$.

111. Khảo sát dấu các nghiệm của các phương trình sau :

a) $a^2x^2 + 3ax + 2 = 0$ với $a < 0$ b) $2x^2 - mx - m^2 = 0$ với $m > 0$

112. Lập các phương trình bậc hai biết hai nghiệm của nó cho theo bảng dưới đây :

Thứ tự	x_1	x_2
1	3	-2
2	$5 + \sqrt{3}$	$5 - \sqrt{3}$
3	$3a$	$4a$
4	$2m - n$	$2m + n$

113. Cho phương trình $(m + 2)x^2 - 2(m + 1)x + m = 0$

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Xác định m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

c) Xác định m để phương trình có một nghiệm $x = -1$ và tính nghiệm kia.

d) Xác định m để phương trình có tổng lập phương hai nghiệm bằng 2.

114. Giải và biện luận theo tham số k các phương trình :

a) $x^2 - (k + 2)x + k = 0$ b) $kx^2 + 2x - 2 = 0$ c) $2x^2 + kx + 2 = 0$

115. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm :

$$(m - 1)x^2 + 2(n + 1)x + p = 0 \quad (1)$$

$$(n + 1)x^2 + 2px + (m - 1) = 0 \quad (2)$$

$$px^2 + 2(m - 1)x + (n + 1) = 0 \quad (3)$$

116. 1) Chứng minh rằng hai phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ và $cx^2 + bx + a = 0$ có một nghiệm chung duy nhất khi và chỉ khi $|b| = |a + c|$.

2) Với giá trị nào của k thì hai phương trình sau có nghiệm chung. Tìm nghiệm chung đó.

$$3x^2 + (5k + 1)x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + (2k - 3)x + 4 = 0 \quad (2)$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC / 2826

VI - PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

• *Phương trình chứa giá trị tuyệt đối*

117. Giải các phương trình sau :

a) $|x - 1| = 3$; b) $|x + 2| = -1$;

c) $|2x - 1| = |x + 3|$; d) $|x + 4| - |x - 4| = 8$.

118. Tìm nghiệm của các phương trình sau :

a) $x^2 - |x| - 2 = 0$; b) $x^2 + 5|x| + 4 = 0$;

c) $2x^2 - |5x - 2| = 0$; d) $|x^2 - 1| = x + 3$

• *Phương trình vô tỉ*

119. Giải các phương trình sau :

a) $21 + \sqrt{2x - 7} = x$; b) $3x - \sqrt{18x + 1} + 1 = 0$;

c) $\sqrt{x} - \sqrt{x + 3} = 1$; d) $\sqrt{15 - x} + \sqrt{3 - x} = 6$.

120. Giải và biện luận phương trình sau : $\sqrt{|x| + 1} - \sqrt{|x|} = a$

121. Giải phương trình : $x + \sqrt{4 - x^2} = 2 + 3x\sqrt{4 - x^2}$ *(Đề thi ĐH Mở, 2001)*

122. Giải phương trình : $\sqrt{x + 1} + \sqrt{4 - x} + \sqrt{(x + 1)(4 - x)} = 5$

(Đề thi ĐH Ngoại ngữ, 2001)

• *Hệ phương trình bậc hai hai ẩn*

123. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - xy + 3y^2 + 2x - 5y - 4 = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$

124. Tìm nghiệm của các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 2y - x = 3 \\ x^2 - y + y^2 = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x + y + xy = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 2xy - y^2 + 5x + 20 = 0 \end{cases}$

125. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ x + y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + xy = -11 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases}$

126. Tìm nghiệm của các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} x^2 + y + \dfrac{1}{4} = 0 \\ x + y^2 + \dfrac{1}{4} = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + xy - y = 13 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + x = 4xy + 2y + 2 \\ 4x^2 + 4xy + y^2 = 2x + y + 56 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x^2 + 2xy + 6x - 27 = 0 \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \end{cases}$

127. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 3 \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 0 \end{cases}$

128. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm : $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$

129. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y + 3xy = 4 + 6m \\ x^2 + y^2 = 16 - 4m \end{cases}$ (I) (m là tham số).

a) Giải (I) khi m = 2.

b) Xác định m để hệ (I) có nghiệm.

130. Giải và biện luận phương trình :

a) $(a - 1)x + 2 = a + 1$ b) $ax^2 + 2x + 1 = 0$

131. Cho phương trình : $x^2 - 2(a - 1)x + 2a + 1 = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) với $a = -2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để (1) chỉ có một nghiệm ? Hai nghiệm trái dấu ? Hai nghiệm cùng dấu ? Hai nghiệm cùng dương.

132. Giải và biện luận phương trình sau bằng đồ thị :

a) $x^2 + 5x = p - 6$ (p là tham số)

b) $-x^2 + 4x - 3 - k = 0$ (k là tham số)

133. Tìm tất cả các giá trị của a để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình $x^2 - 2x + a = 0$ thỏa mãn điều kiện $7x_2 - 4x_1 = 47$.

134. Tìm tất cả các giá trị của k :

a) Để phương trình : $x^2 - 3kx + k^2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75$.

b) Để hai phương trình : $x^2 + kx + 1 = 0$ và $x^2 + x + k = 0$ có một nghiệm chung.

135. Giải và biện luận các hệ :

a) $\begin{cases} ax + (a-1)y = 1 + a \\ x + 2y = a \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx + 3y = m + 1 \\ 2x + (m-1)y = 3 \end{cases}$

136. Giải các phương trình sau :

a) $x^2 - |x - 1| = 0$ b) $|x^2 - x + 5| = x - x^2 - 5$

c) $3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$ *(Đề thi Học viện Kĩ thuật Quân sự, 2001)*

d) $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \dfrac{x+3}{5}$ *(Đề thi Học viện Bưu chính Viễn thông, 2001)*

137. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^3 + y^3 = 26 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$

138. Tìm tất cả các nghiệm x > 0, y > 0 của hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 50 \\ (x + y)(xy - 1) = 25 \end{cases}$$

139. Tìm b để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} xy + x^2 = b(y - 1) \\ xy + y^2 = b(x - 1) \end{cases}$$

4 BẤT ĐẲNG THỨC - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I - KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT BẤT ĐẲNG THỨC

140. Chứng minh :

a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ với $\forall\ a ; b \in R$.

b) $a^2 + b^2 \geq ab$ với $\forall\ a ; b \in R$.

c) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ với $\forall\ a ; b \in R$.

d) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ với $\forall\ a ; b ; c \in R$.

141. Chứng minh :

a) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$ với $\forall\ a ; b ; c \in R$

b) $\dfrac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$ với $\forall\ a ; b ; c$

c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$ với $\forall\ a ; b ; c ; d ; e \in R$

d) $4a^4 + 5a^2 \geq 8a^3 + 2a - 1$ với $\forall a$

142. Chứng minh :

a) $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geq 6abc$ với $\forall$ a ; b ; c

b) $a^4+b^4+c^4+d^4\geq 4abcd$ với $\forall$ a ; b ; c ; d

c) $a^2+b^2+c^2+d^2\geq (a+c)(b+d)$ với $\forall$ a ; b ; c ; d

d) $3(a^2+b^2+c^2)\geq (a+b+c)^2\geq 3(ab+ac+bc)$ $\forall$ a ; b ; c

143. Chứng minh :

a) $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$ b) $2(a^2+b^2)\geq (a+b)^2\geq 4ab$

c) $(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10>0$ d) $(a+5)^4+(a+1)^4\geq 32$

144. Chứng minh : với a ; b ; c > 0

a) $\frac{a}{b}<1$ thì $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$ b) $\frac{a}{b}\geq 1$ thì $\frac{a}{b}\geq\frac{a+c}{b+c}$

c) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ d) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+4\geq 3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

145. Chứng minh : với a ; b ; c > 0

a) $\frac{1}{ab}\geq\frac{4}{(a+b)^2}$; b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$; c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$

146. Chứng minh : với a ; b ; c > 0

a) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c$; b) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$;

c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{4}{2a+b+c}+\frac{4}{a+2b+c}+\frac{4}{a+b+2c}$;

d) $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\geq\frac{3}{a+b+c}$;

147. Chứng minh : với a ; b ; c > 0

a) $\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\geq\frac{9}{4(a+b+c)}$;

b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\left(\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\right)$;

c) $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}$;

d) $\frac{(a+b)^2}{c}+\frac{(b+c)^2}{a}+\frac{(c+a)^2}{b}\geq 4(a+b+c)$;

148. Chứng minh với $a ; b ; c ; d > 0$

a) $\dfrac{a+c}{a+b}+\dfrac{b+d}{b+c}+\dfrac{c+a}{c+d}+\dfrac{d+b}{d+a}\geq 4$

b) $\dfrac{a+c}{(a+b)(c+d)}+\dfrac{b+d}{(a+d)(b+c)}\geq\dfrac{4}{a+b+c+d}$

c) $\dfrac{3}{a+b}+\dfrac{2}{c+d}+\dfrac{a+b}{(a+c)(b+d)}\geq\dfrac{12}{a+b+c+d}$

149. Chứng minh

a) $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\geq 2$

b) $a\geq 1 ; b\geq 1$ thì $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\leq ab$

c) $a>b>0$ thì $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

d) $a>b>0$ thì $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$

150. Chứng minh

a) $a ; b ; c ; d\geq 0$ thì $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geq\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$

b) $a>b>0$ thì $\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leq\sqrt[4]{ab}$

c) $a>c>0 ; b>c$ thì $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leq\sqrt{ab}$

d) $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}$ (Mincôpki)

151. Chứng minh :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{k}}>2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$ và $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}<2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$ với $\forall k\in N$

Từ đó suy ra : $2\sqrt{n+1}-2<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+.......+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$

b) $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<2\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

Từ đó suy ra : $\dfrac{1}{2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}+.......+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2$

152. Với $a ; b ; c$ là ba cạnh của ΔABC, chứng minh :

a) $(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)\leq abc$

b) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}<2$

c) $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{a-b+c}+\dfrac{1}{b+c-a}\ge\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

d) $\dfrac{(a+b)^2}{a+b-c}+\dfrac{(c+a)^2}{a-b+c}+\dfrac{(b+c)^2}{b+c-a}\ge 4(a+b+c)$

II - BẤT ĐẲNG THỨC VỀ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI VÀ BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

153. Chứng minh :

a) $|a|+|b|\ge|a+b|$ $\qquad$ $|a|+|b|\ge|a-b|$

b) $|a|-|b|\le|a+b|$ $\qquad$ $|a|-|b|\le|a-b|$

c) $|a|+|b|+|c|\ge|a+b+c|$

d) $|a-b|+|b-c|\ge|a-c|$

154. Chứng minh :

a) $|x|+|y|+|x-3|+|y-5|\ge 8$

b) $\sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}}+\sqrt{a+15-8\sqrt{a-1}}\ge 2$ với $\forall\, a\ge 1$

155. Cho $|a|<1$; $|a-c|<1999$; $|b-1|<1999$. Chứng minh $|ab-c|<3998$

156. Chứng minh :

a) $2|ax+by|\le a^2+b^2+x^2+y^2$ $\qquad$ b) $|x|;|y|;|z|\ge 3\Rightarrow\left|\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}\right|\le 1$

157. Chứng minh :

a) $\left(1+\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)\left(1+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)\ge 4$ $\qquad$ b) $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)^n+\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^n\ge 2^{n+1}$

c) $\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{1}{4}\ge\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a+b}$ $\qquad$ d) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$

e) $\dfrac{\sqrt{a}}{b}+\dfrac{\sqrt{b}}{a}>\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

158. Chứng minh :

a) $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}\ge a+b$ $\qquad$ b) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{3a+b}+\dfrac{4}{a+3b}$

c) $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\ge\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ $\qquad$ d) $\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{b}{a^3}\ge\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$

159. Chứng minh :

a) $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}>2$

b) $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$

c) $ac+\frac{b}{c} \ge 2\sqrt{ab}$ d) $\frac{a+bc^4}{2c^2} \ge \sqrt{ab}$ e) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a} \ge 2b$

160. Chứng minh :

a) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+d}+\frac{1}{d+a} \ge \frac{8}{a+b+c+d}$

b) $2 < \frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b} < 3$

c) $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \le \frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$

d) $\frac{a^3+b^3}{2ab}+\frac{b^3+c^3}{2bc}+\frac{c^3+a^3}{2ac} \ge a+b+c$

e) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$

161. Cho a ; b ; c là ba cạnh của ΔABC. Chứng minh :

a) $\frac{1}{(a+b-c)^n}+\frac{1}{(a-b+c)^n}+\frac{1}{(b+c-a)^n} \ge \frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}$

b) $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} < \sqrt{3}(a+b+c)$

c) $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} < \sqrt{6}$

d) $\sqrt{b+c-a}+\sqrt{a-b+c}+\sqrt{a+b-c} \le \sqrt{3(a+b+c)}$

162. a) Cho x ; y dương thỏa mãn $x^2+y^3 \ge x^3+y^4$.

Chứng minh rằng $x^3+y^3 \le x^2+y^2 \le x+y \le 2$

b) Cho $\begin{cases} x+y+z=5 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases}$, chứng minh $1 \le x\ ;\ y\ ;\ z \le \frac{7}{3}$

c) Cho $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ xy+yz+xz=1 \end{cases}$, chứng minh $-\frac{4}{3} \le x\ ;\ y\ ;\ z \le \frac{4}{3}$

d) Cho $0 < a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d < 1$. Chứng minh rằng trong 4 bất đẳng thức sau có ít nhất 1 bất đẳng thức là sai :

$2a(1-b) > 1$; $3b(1-c) > 2$; $8c(1-d) > 1$; $32d(1-a) > 3$

III - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

163. Số 2 là nghiệm của bất phương trình nào sau đây? Vì sao?

a) $x^2 - 4x < 0$ b) $x^3 - x + 1 > 0$ c) $x - 2 < 0$

164. Cho các cặp bất phương trình :

a) $2x - 3 > 0$ và $2x - 3 + \frac{1}{x-5} > \frac{1}{x-5}$

b) $x^2(x - 3) < 0$ và $x - 3 < 0$ c) $(x - 2)^2 > 0$ và $x - 1 > 0$

Các cặp bất phương trình nào là tương đương? Vì sao?

165. Tìm điều kiện xác định để suy ra nghiệm của mỗi bất phương trình sau :

a) $\sqrt{5-x} \leq \sqrt{x-5}$ b) $\sqrt{5-x} > \sqrt{x-5}$

c) $\frac{x+1}{\sqrt{x-3}} < \frac{4}{\sqrt{x-3}}$ d) $\sqrt{2x-3} + \frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{x-3} + 1$

166. Vì sao các bất phương trình sau đúng với mọi x :

a) $x^2 - x + 5 > 0$ b) $(x - 2)^2 + \frac{1}{x^2+1} > 0$

c) $x^6 + x^4 + x^2 + 1 > 0$ d) $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2} > 0$

167. Bất phương trình sau vô nghiệm, vì sao?

a) $x^2 + 1 \leq x$ b) $\sqrt{2-x} + 1 < 0$

c) $(x - 1)^2 + (x + 2)^2 \leq 0$ d) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 8x + 20} < 0$

168. Tìm chỗ sai trong lời giải sau đây :

a) $\sqrt{x-5} > \sqrt{3+2x} \Leftrightarrow x - 5 > 3 + 2x \Leftrightarrow x < -8$

b) $\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}} > \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow x - 2 > \sqrt{x^2-2x-3} \Leftrightarrow (x-2)^2 > x^2 - 2x - 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > x^2 - 2x - 3 \Leftrightarrow 2x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{2}$

169. Vì sao bất phương trình sau vô nghiệm ?

a) $\sqrt{x-5} > \sqrt{3+2x}$ b) $\frac{1}{\sqrt{x-2}} < \frac{1}{1-x}$ c) $\sqrt{x^2-1} + 2\sqrt{1-x} - 3 > 0$

170. Vì sao bất phương trình sau vô nghiệm?

a) $x^2 - x + 1 \leq 0$ b) $-x^2 + 3x - 3 > 0$ c) $x^2 - 2x + 3 < 0$

IV - BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 1 ẨN

171. Giải các bất phương trình :

a) $2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4}$ b) $\frac{6x}{2x+3} \geq \frac{3x-2}{x-1}$ c) $|x-1| + |2-x| < 3 - x$

172. Giải và biện luận bất phương trình :

a) $\dfrac{m(x-2)}{3}-(x+1)>\dfrac{2(m-x)}{3}$ b) $\dfrac{m(x-2)}{6}-\dfrac{x-m}{3}<\dfrac{x+1}{2}$

c) $\dfrac{ax}{a-2}-\dfrac{x-1}{3}<\dfrac{2x+3}{4}$

173. Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{3x-4}{x+2}>1$ b) $\dfrac{2x-5}{x-2}\le 1$ c) $\dfrac{1}{x+1}\le\dfrac{5}{2x+1}$

174. Giải các bất phương trình :

a) $|2x-5|<x+1$ b) $|2x-1|>x$

c) $|x-2|>x+1$ d) $|x+2|>|x+1|$

175. Giải hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} 8x-5>\dfrac{15x-8}{2} \\ 2(2x-3)>5x-\dfrac{3}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{4x-5}{7}<x+3 \\ \dfrac{3x+8}{4}>2x-5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x+\dfrac{5}{7}>4x+7 \\ \dfrac{8x+3}{2}<2x+25 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 15x-2>2x+\dfrac{1}{3} \\ 2(x-4)<\dfrac{3x-14}{2} \end{cases}$

Tìm nghiệm thực ? Tìm nghiệm nguyên ? Tìm nghiệm nguyên lớn nhất ?

176. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm, vô nghiệm :

$$\begin{cases} x+4m^2\le 2mx+1 \\ 3x+2>2x+1 \end{cases}$$

177. Tìm chỗ sai trong lời giải :

$\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x+1}\ge x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1\ge\sqrt{x+1} \Leftrightarrow$ vô nghiệm

vì $\sqrt{x-1}<\sqrt{x+1}$ nên $\sqrt{x-1}-1<\sqrt{x+1}$. TXĐ : $x\ge 1$

178. Giải và biện luận các bất phương trình sau :

a) $x+m+1>2m(m-x)$ b) $m(x-4)<m^2-3(x-1)$

c) $|2x-1|=x+m$

179. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có) của biểu thức :

a) $A=\dfrac{2}{5-3x}-3x$ với $x\le\dfrac{5}{3}$ b) $B=\dfrac{x^4-14x^2+4}{x^2}$ với $x\ne 0$

c) $C=\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{5}{x}$ với $x\in(0;1)$ d) $D=2(x^3-1)+\dfrac{3}{x^2}$ với $x\ge 0$

180. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức :

a) $A = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

b) $B = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ với $x \geq 1$

c) $C = x + y$ biết $x\ ;\ y > 0$ và $\dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = 1$

V - DẤU NHỊ THỨC BẬC NHẤT
BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 1 ẨN

Xét dấu các biểu thức sau :

181. $A_1 = (5x - 1)(x + 3)$ $\quad A_2 = \dfrac{2-5x}{5x+1}$ $\quad A_3 = 3 - \dfrac{x+2}{x-2}$

182. $B_1 = \dfrac{(x-1)(2-5x)}{(x-1)(5x+1)}$ $\quad B_2 = \dfrac{(5x-1)(x+3)x}{x}$ $\quad B_3 = \dfrac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+1)}$

183. $C_1 = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}$ $\quad C_2 = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2}$ $\quad C_3 = \dfrac{x^2-6x+8}{x^2+8x-9}$

184. $D_1 = (x-1)(x+2)(3x-2)(x-\sqrt{2})$

$D_2 = (x-1)(x+2)(2-x)(5-x)(x-6)$

Giải bất phương trình :

185. a) $\dfrac{1-4x}{1+2x} > 3$ $\quad$ b) $\dfrac{1-4x}{1+2x} \leq -3$

186. a) $|x+3| + |2x-4| < 5$ $\quad$ b) $|3x+5| > 2$

187. a) $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| \leq 3$ $\quad$ b) $2x(x-1) + 3x \geq 2x^2 - x + 3$

c) $(3x-1)^2 - (x+5) \leq 9x^2 + x$

Xét dấu của biểu thức :

188. a) $A = m^2x - 2$ $\quad$ b) $B = (m-1)x + 2m$ $\quad$ c) $C = (x-1)(x-m)$

189. a) $A = \dfrac{1}{x-m} - \dfrac{1}{x-2}$ $\quad$ b) $B = \dfrac{x+3}{(x+m)(x-2)}$

190. a) $A = (2x+1)(x-2)(x+m)$ $\quad$ b) $B = |x-m| - |x+2|$

VI - BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 2 ẨN

191. Xác định (vẽ) miền nghiệm của bất phương trình :

a) $y \le 3$ b) $x \ge 5$

c) $3(x - y + 1) > x + 5$ d) $2(y + x) \le 3(x - 1) + 2$

192. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} 2x - y \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y \ge 0 \\ y \ge x \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 1 \\ y - 3x \ge 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 1 \\ y - 3x \le 0 \end{cases}$

193. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} x \ge -2 \\ x \le 5 \\ y \ge 2x \\ y \le 5x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y < -3 \\ x + y > 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - 1 \ge 0 \\ 2(x - 1) + \dfrac{3y}{2} \le 4 \\ x \ge 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -2x + y \le -2 \\ x - 2y \le 2 \\ x + y \le 5 \\ x \ge 0 \end{cases}$

194. Giải và biện luận bất phương trình :

a) $a(x + 4) > 3ax + 2$ b) $ax + 1 \le 2x + a$

c) $(1 - a)^2x > 1 - 2ax$ d) $\dfrac{ax + 1}{a - 1} > \dfrac{ax - 1}{a + 1}$

195. Giải và biện luận bất phương trình :

a) $\dfrac{2x + a + 1}{x + 1} > 0$ b) $\dfrac{ax - a + 1}{x - 1} < 0$

196. Với điều kiện nào của a thì hệ sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} 2x + 1 - a \le 0 \\ ax + 2a - 1 \le 0 \end{cases}$$

197. Giải các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} 3x + 1 \ge 2x + 7 \\ 4x + 3 < 2x + 19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x + 1}{2} - \dfrac{x + 2}{3} < 2 + \dfrac{x}{6} \\ \dfrac{3x + 5}{4} - 1 \le \dfrac{x - 2}{3} + x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3 \le 4 + 2x \\ 5x - 3 < 4x - 1 \\ x \in Z \end{cases}$ d) $\sqrt{x - 1}(x - a + 2) > 0$

198. Tìm a để hệ $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} \leq 0 \\ 4x + 1 \leq a \end{cases}$ a) Vô nghiệm ? b) Có nghiệm duy nhất ?

199. Giải và biện luận bất phương trình

a) $x + m + 1 > 2m(m - x)$ b) $m(x - 4) < m^2 - 3(x - 1)$

c) $|2x - 5| \geq x + 2$ d) $|3x + 2| \geq |2 - x|$

200. Giải hệ bất phương trình

a) $\begin{cases} 5x + 2 \geq \dfrac{4x + 5}{2} \\ \dfrac{2x + 3}{3} \leq 4x + 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3 \geq 5 - \dfrac{x + 2}{3} \\ \dfrac{2x + 1}{3} + \dfrac{3x - 2}{4} < \dfrac{x - 1}{6} + \dfrac{3x - 2}{3} \end{cases}$

VII - DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

201. Xét dấu các tam thức :

a) $f_1 = x^2 + x + 1$ b) $f_2 = x_2 + 2x + 3$ c) $f_3 = - x^2 + 3x - 2$

202. Xét dấu các tam thức :

a) $f_7 = x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6}$ b) $f_8 = x^2 + (\sqrt{7} - 1)x - \sqrt{7}$

c) $f_9 = \sqrt{3}x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1$

203. Xét dấu các biểu thức :

$B_1 = \dfrac{3x - 5}{4x^2 + 19x + 12}$ $B_2 = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 5x + 7}$ $B_3 = \dfrac{5x + 2}{x^3 - 3x + 2}$

204. Xét dấu các biểu thức :

a) $\dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x - 30}$ b) $|x^2 - 2x + 2| - 2|x^2 + 5x - 6|$

205. Cho $f(x) = x^2 + ax + 2$

a) Tìm a để $f(x) > 0$ với $\forall x \in R$

b) Tìm a để $f(x) > 0$ với $\forall x > 2$

c) Tìm a để $f(x) > 0$ với $\forall x \in [1 ; 2]$

d) Tìm a để f(x) bằng một bình phương nhị thức

206. Cho $f(x) = x^2 - 2ax + 9$

a) Tìm a để $f(x) > 0$ với $\forall x$

b) Tìm a để $f(x) < 0$ với $\forall x \in (0 ; 1)$

c) Tìm a để $f(x) > 0$ với $\forall x \in D = (-\infty ; -2) \cup (1 ; +\infty)$

d) Tìm a để $f(x) = (ax + b)^2$. Viết rõ kết quả

207. Chứng tỏ các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi tham số a :

a) $x^2 - 2(a - 1)x + a - 3 = 0$

b) $(a + 1)x^2 - (3a - 2)x + 2a - 3 = 0$

208. Chứng tỏ các phương trình sau luôn vô nghiệm với mọi tham số a :

a) $x^2 - 2(a - 3)x + 2a^2 - 7a + 10 = 0$

b) $(2a^2 + 1)x^2 - 4ax + 2 = 0$

209. Tìm a để f(x) luôn dương

a) $f(x) = (a - 1)x^2 + 2(a + 1)x - 2a$ b) $f(x) = (a + \sqrt{3})x^2 - 2ax + a - \sqrt{3}$

210. Tìm a để f(x) luôn âm

a) $f(x) = ax^2 + (a + 1)x + 2a - 1$ b) $f(x) = (a + 2)x^2 - 5x + 4$

211. Tìm a để f(x) viết được thành bình phương nhị thức (viết rõ kết quả)

$$f(x) = ax^2 - (a - 3)x + 1$$

VIII - BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

212. Giải bất phương trình :

a) $3x^2 + x - 6 > 0$ b) $2x^2 - |5x + 2| > 0$

c) $2x^2 + 7x + 5 > (x + 1)^2$

213. Giải bất phương trình :

a) $15x^2 - 7x - 2 \geq 0$ b) $(x - 1)(x + 2) \geq 3(x^2 - 1)$

c) $x^2 - (1 + \sqrt{5})x + \sqrt{5} \geq 0$ d) $(x - 1)(x + 3) \geq (x - 1)(x + 2)$

214. Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $x^2 - mx + m - 3 \geq 0$ b) $mx^2 - 2x + 4 \geq 0$

c) $(m + 1)x^2 - 2mx + 2m \leq 0$

215. Tìm miền xác định theo tham số m :

a) $y = \sqrt{x^2 - 2mx + 2 - m}$ b) $y = \sqrt{mx^2 + (m + 3)x + 3}$

216. Giải bất phương trình :

a) $\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x^2 - x + 1} \leq \frac{2x + 3}{x^3 + 1}$ b) $\frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x(2 - x)} > 0$

c) $\frac{x^2 - 4x + 3}{3 - 2x} < 1 - x$

217. Giải bất phương trình :

a) $\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 2} < \frac{3}{x - 3}$ b) $\frac{x - 2}{1 - x} + \frac{x - 3}{x + 1} \geq \frac{x^2 + 4x + 15}{x^2 - 1}$

c) $\frac{x}{x + 2} + \frac{1}{x} \leq \frac{3}{x^2 + 2x}$

218. Giải bất phương trình :

a) $(x-3)\sqrt{x^2-4x-5} \geq 0$ b) $\dfrac{\sqrt{2x^2+5x-7}}{2x-3} \geq \dfrac{\sqrt{2x^2+5x-7}}{x+2}$ c) $\dfrac{|x+1|}{x-1} \leq 3$

219. Giải hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} x^2-2x \geq 0 \\ 4x^2+4x+1 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x^2+x+1 \geq 0 \\ x^2+3x \leq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2-x-6 \geq 0 \\ x^2+x-6 \leq 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x^2-3x+2 \geq 0 \\ 7x^2+9x-16 \leq 0 \end{cases}$

220. Giải bất phương trình :

a) $x^2-7x+12 < |x-4|$ b) $|x^2-x|+|2x-4| \leq 3$

c) $|x^2-3x+2| \leq 3x-3$ d) $x|x-3|-4 \leq 0$

221. Cho phương trình : $(m-1)x^2-2(m+3)x-m+2=0$. Tìm m để phương trình vô nghiệm? Có nghiệm? Có nghiệm duy nhất.

222. Tìm m để các bất phương trình sau đúng với mọi giá trị của x:

a) $(m^2+5m-6)x^2-2(m+1)x+2<0$

b) $\dfrac{5x^2-2x-3}{-(2m+2)x^2+(m-1)x+m+3} > 0$

IX - ĐỊNH LÝ ĐẢO VỀ DẤU TAM THỨC BẬC HAI

223. Cho phương trình : $f=(m-5)x^2-4mx+m-2=0$

a) Tìm m để phương trình có nghiệm

b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm trái dấu

c) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm đêu dương

d) Tìm m để phương trình có 1 nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ còn nghiệm kia ngoài khoảng $[0;1]$

e) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm lớn hơn 2

224. Cho $(m+1)x^2-2(m-1)x+m^2+4m-5=0$

a) Tìm m để $2 \leq x_1 < x_2$

b) Tìm m để $x_1 < 2 < x_2$

c) Tìm m để phương trình có nghiệm lớn hơn 2

d) Tìm hệ thức giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc tham số m

225. Cho $x^2-4mx+3<0$. Tìm m để bất phương trình đúng với $\forall x \in [1;2]$

Cho $x^2-mx+2>0$. Tìm m để bất phương trình đúng với $\forall x > 2$

226. Cho $x^2 - 2(m^2 + 1)x + m^4 < 0$. Tìm m để nghiệm của nó cũng là nghiệm của bất phương trình : $x^2 + 4x + 3 > 0$

227. Tìm m để hệ sau có nghiệm : $\begin{cases} 3x^2 + 4mx - 4 = 0 \\ |x| < 1 \end{cases}$

228. Biện luận theo m nghiệm của hệ : $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = m \\ x^2 - 2x \le 0 \end{cases}$

229. Cho hệ : $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \le 0 \\ x^2 - x - 2m^2 \le 0 \end{cases}$

a) Tìm m để hệ có nghiệm

b) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất

230. Tìm m để phương trình sau có nghiệm : $\sqrt{2x^2 - 2(m+4)x + 5m + 10} = x - 3$

231. Cho phương trình : $mx^2 - 3(m - 1)x + 4(m - 1) = 0$

a) Tìm m để phương trình có nghiệm kép

b) Tìm m để phương trình có đúng 1 nghiệm $\in (2\ ;\ 5)$

232. Tìm m để bất phương trình sau đúng với mọi x : $-3 \le \dfrac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} \le 2$

X - PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

Giải các phương trình và bất phương trình sau:

233. a) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$ b) $x^4 - x^2 + 2 = 0$

c) $16x^4 - 15x^2 - 16 = 0$ d) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

234. a) $\dfrac{4}{x^2 + 2x - 5} - \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{17}{15}$ b) $\dfrac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \dfrac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$

235. a) $(x + 2)(x - 3)(x + 1)(x + 6) = -36$

b) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x$

236. a) $|x^2 - 5x + 4| = x + 4$ b) $|x^2 - 3x + 2| = 1 - |x|$

237. a) $2 - \big|1 - |x|\big| = 1$ b) $\dfrac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} = 2x$

238. a) $x^2 + 9 = 6x + 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}$ b) $\sqrt{5x - 1} = \sqrt{x - 1} - \sqrt{3x - 2}$

239. a) $x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 9x + 1 \ge 0$ b) $x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 \ge 0$

240. a) $\begin{cases} \sqrt{-x^2 - x + 6} > 6x + 3 \\ |x^2 - 2x - 8| \ge 2x \end{cases}$ b) $\sqrt{(x-6)(x-9)} \le 8x - 3$

241. a) $x^2 - \sqrt{x+6} = 6$ b) $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} \ge 0$

c) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5x}$

242. a) Cho $x^4 + 2mx^2 + m + 3 = 0$. Tìm m để $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < 2 < x_4$

b) Cho $2x^4 + mx^2 + 2 = 0$

+ Tìm m để $x_1 < -2 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$

+ Tìm m để 4 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng

5

THỐNG KÊ

243. Cân lần lượt 40 quả cam (đơn vị gram) ta được kết quả sau (mẫu số liệu) :

85	**87**	**86**	**88**	**90**	**92**	**93**	**97**	**86**	**89**
91	**93**	**93**	**88**	**87**	**85**	**86**	**89**	**90**	**92**
86	**89**	**92**	**91**	**90**	**85**	**87**	**88**	**91**	**94**
88	**87**	**91**	**94**	**94**	**92**	**86**	**89**	**92**	**91**

a) Dấu hiệu điều tra là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Hãy viết giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên.

c) Hãy lập bảng tần số – tần suất ghép nhóm gồm 5 nhóm : 85–86 ; 87–88 ; 89–90 ; 91–92 ; 93 ; 94

d) Vẽ biểu đồ hình cột tần số, tần suất, biểu đồ đa giác, biểu đồ hình quạt

244. Một lần kiểm tra Toán của một lớp gồm 55 học sinh, thống kê điểm số như sau :

Điểm	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Số hs	**0**	**3**	**3**	**5**	**4**	**12**	**10**	**8**	**7**	**1**	**2**

Dấu hiệu điều tra là gì? Kích thước mẫu? Lập bảng tần số – tần suất ghép làm 5 nhóm

245. Tuổi của lớp tại chức ở một tỉnh được thống kê như sau :

Khoảng 18 – 22 tuổi	23 người
23 – 27 tuổi	37 người
28 – 32 tuổi	32 người
33 – 37 tuổi	31 người
38 – 42 tuổi	27 người

Lập bảng tần số – tần suất của mẫu số liệu. Dấu hiệu điều tra?

246. Kết quả thi tiếng Anh của 32 học sinh được cho trong mẫu sau (thang điểm 100) :

59	**41**	**74**	**68**	**52**	**56**	**49**	**69**
61	**42**	**60**	**79**	**57**	**87**	**47**	**88**
55	**65**	**65**	**68**	**50**	**61**	**78**	**90**
65	**86**	**72**	**66**	**63**	**72**	**74**	**95**

a) Lập bảng phân bố tần số – tần suất, ghép nhóm 40–50 ; 51–60 ; 61–70 ; 71–80 ; 81–90 ; 91–100

b) Vẽ biểu đồ hình cột tần số, hình cột tần suất.

247. Nghiên cứu về bệnh hen, người ta ghi lại tuổi của 80 bệnh nhân mắc bệnh này theo bảng số liệu sau :

Nhóm	**Khoảng tuổi**	**Số người**
1	**11 – 20**	**15**
2	**21 – 30**	**17**
3	**31 – 40**	**14**
4	**41 – 50**	**28**
5	**51 – 60**	**6**

Vẽ biểu đồ tần số – tần suất của mẫu.

248. Năng suất 1 loại cây trên 36 thửa đất được thống kê theo bảng sau (tấn/ha) :

19,2	**17,7**	**20,0**	**21,1**	**21,5**	**18,5**	**20,6**	**19,3**	**19,0**
19,1	**15,2**	**19,5**	**17,3**	**16,3**	**19,6**	**17,5**	**19,1**	**19,7**
20,8	**19,3**	**16,0**	**17,4**	**15,3**	**17,2**	**17,6**	**11,5**	**11,4**
18,2	**17,1**	**19,2**	**16,0**	**16,7**	**16,4**	**46,1**	**17,8**	**20,0**

a) Tính trung vị, trung bình, phương sai của mẫu số liệu trên.

b) Ghép nhóm 10–15 ; 15,1–20 ; 20,1–25 ; trên 25. Lập bảng tần số – tần suất ghép nhóm.

249. Cho bảng số liệu sau về cân nặng của 44 học sinh (đơn vị : kg) :

39	**41**	**40**	**42**	**41**	**40**	**42**	**44**	**40**	**43**	**42**
41	**43**	**39**	**42**	**40**	**41**	**42**	**39**	**41**	**37**	**43**
41	**38**	**43**	**39**	**42**	**39**	**41**	**37**	**43**	**39**	**41**
40	**42**	**40**	**41**	**42**	**40**	**43**	**38**	**39**	**41**	**41**

Sắp xếp lại và vẽ đồ thị biểu mẫu dãy số liệu trên.

250. Cho bảng số liệu sau về trọng lượng của 32 học sinh (đơn vị : kg)

47	45	41	54	50	46	38	53
45	38	31	60	43	44	47	62
39	45	55	42	49	42	37	37
61	40	35	43	27	43	50	41

Sắp xếp lại theo 4 nhóm, lập bảng phân bố tần số tần suất và vẽ biểu đồ

251. Theo bảng đóng góp tiền ủng hộ quỹ "Vì người nghèo" ở một phường có 40 đơn vị tập thể, có bảng số liệu sau (đơn vị : nghìn đồng) :

147	151	63	65	313	352	785	501	483	231
524	72	172	287	215	308	521	368	428	792
806	315	703	168	349	127	125	409	234	78
698	549	350	75	75	513	212	440	158	217

a) Lập bảng phân bố tần số – tần suất ghép nhóm chênh nhau 100 nghìn đồng 0 – 100 ; 101 – 200 ; 201 – 300. Vẽ biểu đồ mẫu số liệu.

b) Có bao nhiêu đơn vị góp trên 400 nghìn? trên 600 nghìn? chiếm bao nhiêu phần trăm?

c) Số tiền đóng góp trung bình của các đơn vị là bao nhiêu?

252. Điều tra dân số của 20 quận huyện của thành phố A ta có bảng số liệu chính xác tại thời điểm thống kê là :

17573	15421	19632	16602	17368	16162
18969	17513	18223	18101	17870	17696
16598	20725	19905	17337	18972	18405
15989	20910				

a) Lập bảng phân bố tần số – tần suất ghép làm 6 nhóm.

b) Vẽ biểu đồ tần số – tần suất.

253. Cân lần lượt 40 quả cam (đơn vị gram) ta được kết quả sau (mẫu số liệu) :

85	87	86	88	90	92	93	97	86	89
91	93	93	88	87	85	86	89	90	92
86	89	92	91	90	85	87	88	91	94
88	87	91	94	94	92	86	89	92	91

a) Tính số trung bình của mẫu. Tính trung vị của mẫu. Tính mốt (m_o) của mẫu.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu (s^2 và s).

254. Một lần kiểm tra Toán của một lớp gồm 45 học sinh, thống kê điểm số như sau :

Điểm	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Số hs	**0**	**3**	**3**	**5**	**4**	**12**	**10**	**8**	**7**	**1**	**2**

a) Số trung bình của mẫu? Số trung vị? Mốt (m_o)? Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

b) Vẽ biểu đồ hình cột tần số, tần suất, biểu đồ đa giác, biểu đồ hình quạt.

255. Tuổi của lớp tại chức ở một tỉnh được thống kê như sau :

Khoảng 18 – 22 tuổi	23 người
23 – 27 tuổi	37 người
28 – 32 tuổi	32 người
33 – 37 tuổi	31 người
38 – 42 tuổi	27 người

Tính $\overline{X}$, trung vị, mốt, phương sai, độ lệch chuẩn.

256. Kết quả thi tiếng Anh của 32 học sinh được cho trong mẫu sau (thang điểm 100)

59	**41**	**74**	**68**	**52**	**56**	**49**	**69**
61	**42**	**60**	**79**	**57**	**87**	**47**	**88**
55	**65**	**65**	**68**	**50**	**61**	**78**	**90**
65	**86**	**72**	**66**	**63**	**72**	**74**	**95**

Tính các số liệu đặc trưng : số trung bình, trung vị, mốt, phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu.

257. Nghiên cứu về bệnh hen, người ta ghi lại tuổi của 80 bệnh nhân mắc bệnh này theo bảng số liệu sau :

Nhóm	**Khoảng tuổi**	**Số người**
1	**11 - 20**	**15**
2	**21 - 30**	**17**
3	**31 - 40**	**14**
4	**41 - 50**	**28**
5	**51 - 60**	**6**

Tính các số liệu đặc trưng của mẫu.

258. Năng suất 1 loại cây trên 36 thửa đất được thống kê theo bảng sau (tấn/ha) :

19,2	17,7	20,0	21,1	21,5	18,5	20,6	19,3	19,0
19,1	15,2	19,5	17,3	16,3	19,6	17,5	19,1	19,7
20,8	19,3	16,0	17,4	15,3	17,2	17,6	11,5	11,4
18,2	17,1	19,2	16,0	16,7	16,4	46,1	17,8	20,0

Tính 5 số liệu đặc trưng.

259. Cho bảng số liệu sau về cân nặng của 44 học sinh (đơn vị : kg) :

39	41	40	42	41	40	42	44	40	43	42
41	43	39	42	40	41	42	39	41	37	43
41	38	43	39	42	39	41	37	43	39	41
40	42	40	41	42	40	43	38	39	41	41

Tính các số liệu đặc trưng của mẫu.

260. Cho bảng số liệu sau về trọng lượng của 32 học sinh (đơn vị : kg)

47	45	41	54	50	46	38	53
45	38	31	60	43	44	47	62
39	45	55	42	49	42	37	37
61	40	35	43	27	43	50	41

Tìm các số đặc trưng của mẫu số liệu.

261. Theo bảng đóng góp tiền ủng hộ quỹ "Vì người nghèo" ở một phường có 40 đơn vị tập thể, có bảng số liệu sau (đơn vị : nghìn đồng) :

147	151	63	65	313	352	785	501	483	231
524	72	172	287	215	308	521	368	428	792
806	315	703	168	349	127	125	409	234	78
698	549	350	75	75	513	212	440	158	217

Tìm các số đặc trưng của mẫu số liệu.

262. Điều tra dân số của 20 quận huyện của thành phố A ta có bảng số liệu chính xác tại thời điểm thống kê là :

17573	15421	19632	16602	17368	16162
18969	17513	18223	18101	17870	17696
16598	20725	19905	17337	18972	18405
15989	20910				

Tìm các số đặc trưng của mẫu số liệu.

6 GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I - GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC

263. 1) Cho biết các đơn vị đo góc và cung tròn. Hãy lập công thức biểu diễn mối liên quan giữa các đơn vị đo.

2) Lập công thức đo độ dài một cung tròn của một đường tròn có bán kính R và có góc ở tâm là a^o (hoặc α rad).

264. a) Cho góc hình học $\widehat{uOv} = 30^o$. Hãy tìm số đo của góc lượng giác của tia đầu là Ou, tia cuối là Ov.

b) Cũng hỏi như câu a) khi $\widehat{uOv} = \frac{\pi}{3}$rad

265. a) Thế nào là đường tròn định hướng. Biểu diễn góc lượng giác có số đo $(Ou, Ov) = 30^o + k360^o$ trên đường tròn định hướng suy ra cung lượng giác tương ứng với góc này.

b) Nêu sự khác biệt của góc hình học $\widehat{uOv}$ và góc lượng giác (Ou, Ov) ; cung hình học $\overset{\frown}{AB}$ và cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AB}$.

c) Phát biểu hệ thức Salơ về số đo của góc lượng giác.

266. 1) Đổi sang rađian :

$$25^o ; 35^o ; 45^o ; 55^o ; 60^o ; 60^o30' ; 75^o, 120^o15' ; 270^o.$$

2) Đổi sang độ :

$$\frac{\pi}{5} ; \frac{\pi}{3} ; \frac{3\pi}{7} ; \frac{5\pi}{11} ; \frac{6\pi}{13} ; \frac{8\pi}{15}$$

267. 1) Thế nào là đường tròn lượng giác.

2) Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A, hãy chỉ điểm cuối của cung lượng giác : $\frac{\pi}{2} ; -\frac{3\pi}{4} ; 315^o ; -270^o ; \frac{5\pi}{3}$.

268. 1) Định nghĩa sin, cosin, tang, cotang của cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AN}$ có số đo là α.

2) Chứng minh rằng với mọi góc α ta đều có :

$$-1 \le \cos\alpha \le 1 \quad ; \quad -1 \le \sin\alpha \le 1$$

269. a) Xác định giá trị lượng giác của các cung có số đo là :

$$0 ; \frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{2\pi}{3} ; \pi$$

b) Nêu các công thức lượng giác cơ bản.

c) Chứng minh rằng với mọi góc α ta đều có : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

270. Tính giá trị của biểu thức sau :

a) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$

b) $3\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6} + 4\sin\frac{\pi}{2} + 5\cos\pi$

c) $3\sin\frac{25\pi}{6} - 3\cos\frac{19\pi}{3} + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

271. Cho $\sin\alpha + \cos\alpha = m$, tính :

a) $|\sin\alpha - \cos\alpha|$ b) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha$

272. 1) Chứng minh rằng với bất kì giá trị nào của x ta đều có :

$$-5 \le 3\cos x + 4\sin x \le 5$$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $3\cos x + 2\sin x$

273. Nêu ý nghĩa hình học của tgx và cotgx.

274. Tính giá trị của biểu thức sau :

a) $3\sin 60^\circ - 2\cos 60^\circ + 3\tan 60^\circ - 4\cot 90^\circ$

b) $5 - \sin 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ$

275. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - tg^2\alpha - \sin^2\alpha$; b) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - tg^2x(\cos^2 x + 1)$

c) $\dfrac{\sin^2\pi a}{1 + \cos\pi a}$ d) $\dfrac{1 - 2\cos^2\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}}$

276. Chứng minh các đẳng thức sau không phụ thuộc vào x :

a) $\sin^4\frac{x}{2} + \cos^4\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$

b) $\left(\tan\frac{x}{3} + \cot\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\tan\frac{x}{3} - \cot\frac{x}{3}\right)^2$

c) $\dfrac{5\cos x - 4}{3 - 5\sin x} - \dfrac{5\sin x + 3}{4 + 5\cos x}$

d) $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^3 x\cos^2 x$

II - GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC (CUNG) CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

277. 1. Hai góc đối nhau α và $(-\alpha)$ thì giá trị lượng giác của chúng có liên quan như thế nào ?

2. Cũng hỏi như câu 1, với hai góc phụ nhau : α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

3. Cũng hỏi như câu 1, với hai góc hơn kém nhau $\frac{\pi}{2}$: α và $\frac{\pi}{2} + \alpha$

4. Cũng hỏi như câu 1, với hai góc bù nhau : α và $\pi - \alpha$

5. Cũng hỏi như câu 1, với hai góc hơn kém nhau π và $\pi + \alpha$

278. Xét dấu các biểu thức sau :

a) $\sin 51^o - tg 51^o$; b) $\cot 130^o - \cos 130^o$:

c) $\sin 120^o \cos 120^o$; d) $\tan 150^o \cos 300^o$.

279. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sin 110^o + \sin 130^o + \sin 150^o + ... + \sin 230^o + \sin 250^o + \sin 270^o$

b) $\cos 20^o + \cos 40^o + \cos 60^o + ... + \cos 140^o + \cos 160^o + \cos 180^o$

c) $\tan 20^o + \tan 40^o + \tan 60^o + ... + \tan 40^o + \tan 60^o + \tan 180^o$

d) $\cot 15^o + \cot 30^o + \cot 45^o + ... + \cot 135^o + \cot 150^o + \cot 165^o$

280. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sin^2 20^o + \sin^2 40^o + \sin^2 50^o + \sin^2 70^o$

b) $\cos^2 \dfrac{\pi}{13} + \cos^2 \dfrac{3\pi}{13} + \cos^2 \dfrac{5\pi}{13} + \cos^2 \dfrac{11\pi}{26} + \cos^2 \dfrac{7\pi}{26} + \cos^2 \dfrac{3\pi}{26}$

281. Rút gọn các biểu thức :

a) $A = \dfrac{\cot(5,5\pi - \alpha) + \tan(b - 4\pi)}{\cot(\alpha - 6\pi) - \tan(b - 3,5\pi)}$

b) $B = \tan 50^o \tan 190^o \tan 250^o \tan 260^o \tan 400^o \tan 700^o$

282. Cho A, B, C là ba góc của ΔABC. Chứng minh :

a) $\sin(A + B) = \sin C$, $\cos(B + C) = -\cos A$

b) $\sin\dfrac{A + B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$, $\cos\dfrac{B + C}{2} = \sin\dfrac{A}{2}$

c) $\tan(A + C) = -\tan B$, $\cot(A + B) = -\cot C$

d) $\tan\dfrac{A + C}{2} = \cot\dfrac{B}{2}$, $\cot\dfrac{A + B}{2} = \tan\dfrac{C}{2}$

283. Tìm k để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{k\sin x + 1}{\cos x + 2}$ nhỏ hơn -1.

284. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC, ta luôn có :

$$0 < \sin A + \sin B + \sin C - \sin A \sin B - \sin B \sin C - \sin C \sin A \le 1$$

(Trích đề thi vào ĐH Ngoại thương, khối D, 1997)

285. Tính $B = \dfrac{2\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha}$ biết $\tan\alpha = \dfrac{1}{5}$.

III - MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

286. Hãy lập công thức đối với sin và cosin :

$\cos(\alpha - \beta)$; $\cos(\alpha + \beta)$; $\sin(\alpha - \beta)$; $\sin(\alpha + \beta)$; $\tan(\alpha - \beta)$; $\tan(\alpha + \beta)$.

287. Chứng minh rằng :

a) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

b) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

c) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

288. Chứng minh công thức hạ bậc sau :

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad ; \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

289. Cho $\tan\dfrac{\alpha}{2} = t$. Chứng minh rằng :

a) $\sin\alpha = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ b) $\cos\alpha = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ c) $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1 - t^2}$

290. Chứng minh : $\dfrac{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}{1 - \tan^2\alpha\tan^2\beta} = \tan(\alpha + \beta).\tan(\alpha - \beta)$.

291. Cho $\sin 2a = -\dfrac{4}{5}$ và $90^o < a < 135^o$. Tính các giá trị lượng giác của góc a.

292. Chứng minh các hằng đẳng thức sau :

a) $\sin a\sin 3a = \sin^2 2a - \sin^2 a$

b) $\sin^2 2a\cos^2 a = \sin a\sin 3a + \cos^2 2a\sin^2 a$

c) $\sin^4 x = \dfrac{1}{8}\cos 4x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{8}$

293. Tính giá trị biểu thức :

a) $A = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}$ b) $B = \cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{7}$.

294. a) Cho $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$. Tìm $\cos\alpha$. b) Tìm $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

c) Biết $\tan\alpha = \dfrac{1}{5}$ và $\tan\beta = \dfrac{2}{3}$. Tìm $\alpha + \beta$.

IV - CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG, TỔNG THÀNH TÍCH

295. Biến đổi thành tổng

a) $A = 2\sin(x + y)\cos(x - y)$; b) $B = 2\cos(x + y)\cos(x - y)$;

c) $C = 4\sin3a\sin2a\sin a$; d) $D = 4\sin3a\sin2a\cos a$

296. Tính :

a) $A = \sin75^o\sin15^o$; b) $B = \dfrac{1}{2\sin10^o} - 2\sin70^o$

c) $C = \sin\dfrac{\pi}{24}\sin\dfrac{3\pi}{24}\sin\dfrac{7\pi}{24}\sin\dfrac{11\pi}{24}$; d) $D = \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$

297. Chứng minh rằng $\cos12^o + \cos18^o - 4\cos15^o\cos21^o\cos24^o = -\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

(Đề thi vào ĐHQG Hà Nội - 2001)

298. Đơn giản các biểu thức sau :

a) $\dfrac{\sin\alpha + \sin3\alpha}{\cos\alpha + \cos3\alpha}$; b) $\dfrac{\cos4\alpha - \cos2\alpha}{\sin2\alpha + \sin4\alpha}$;

c) $\dfrac{\sin\alpha - 3\sin2\alpha + \sin3\alpha}{\cos\alpha - 3\cos2\alpha + \cos3\alpha}$

299. Chứng minh các hằng đẳng thức sau :

a) $S = \sin a + \sin2a + \sin3a + \dots + \sin na = \dfrac{\sin\dfrac{na}{2}\sin\dfrac{(n+1)a}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}$

b) $P = \cos a + \cos2a + \cos3a + \dots + \cos na = \dfrac{\sin\dfrac{na}{2}\cos\dfrac{n+1}{2}a}{\sin\dfrac{a}{2}}$

300. Các góc của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện :

$$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = 3(\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C)$$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

301. Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c thỏa mãn hệ thức : $2b = a + c$.

Chứng minh rằng $\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{C}{2} = 3$.

302. Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c theo thứ tự đối diện với các góc A, B, C. Hãy nhận dạng tam giác ABC nếu $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \dfrac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)}$ (*).

303. Chứng minh rằng giá trị các biểu thức sau không phụ thuộc vào góc a và b :

a) $\sin^6a + \cos^6a + 3\sin^2a\cos^2a$

b) $\sin^2 a - \cos^2(a - b) + [\cos(a + b) + \cos(a - b)]\cos(a - b) - \cos^2 b$

c) $\cos^2 a + \cos^2(a - b) - [\cos(a + b) + \cos(a - b)]\cos(a - b) - \sin^2 b$

304. Rút gọn biểu thức :

a) $\dfrac{\cos(-288^\circ)\cot 72^\circ}{\tan(-162^\circ)\sin 108^\circ} - \tan 18^\circ$ b) $\dfrac{\sin(x - \pi)\cos(x - 2\pi)\sin(2\pi - x)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\cot(\pi - x)\cot\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)}$

c) $\sin^2(x - 2y) - \cos^2 x - \cos^2 2y$ d) $\dfrac{\sin^2(a + b) - \sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2(a + b) - \cos^2 a - \cos^2 b}$

305. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $P = \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ - \cos 50^\circ \cos 70^\circ$ *(Trích đề thi ĐH An ninh – 2001).*

b) $Q = \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3}\tan 20^\circ \tan 40^\circ$

c) $R = \sin\dfrac{3\pi}{10}\sin\dfrac{\pi}{10} - \sin\dfrac{3\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5} + \sin\dfrac{7\pi}{10}\sin\dfrac{3\pi}{10}$

d) $S = \cos^2 a + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + a\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - a\right)$

306. Chứng minh các hằng đẳng thức sau :

a) $\dfrac{1 - 2\sin^2\alpha}{2\cot\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)} = 1$ b) $\dfrac{1 - 2\sin^2\beta}{1 + \sin 2\beta} = \dfrac{1 - \tan\beta}{1 + \tan\beta}$

c) $\dfrac{\sin^4\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{\tan 2\alpha - 1} = \cos 2\alpha$

d) $8\left(\sin^8\dfrac{\alpha}{2} + \cos^8\dfrac{\alpha}{2}\right) = 1 + 6\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$

307. Cho tanx + cotx = k. Tính :

a) $\tan^2 x + \cot^2 x$; b) tanx – cotx ; c) $\tan^3 x + \cot^3 x$.

308. Cho $\dfrac{\cos(x + y)}{\cos(x - y)} = \dfrac{m}{n}$. Tính tanxtany.

309. Cho $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}4$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$, tính $\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

310. Cho $\tan\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1}{3}\cot\dfrac{\alpha}{2}$ và $\cot\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{2}\left(3\tan\dfrac{\alpha}{2} + \cot\dfrac{\alpha}{2}\right)$ và α, β, γ là ba góc nhọn dương. Tính α + β + γ.

311. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số y = 12sinx + 5cosx + 1.

312. Với giá trị nào của k thì :

a) GTLN (kcosx + sinx) = 7

b) GTNN (kcosx + 2sinx) = –5.

313. Cho A, B, C là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

b) $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C = \frac{R}{2}(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$

c) $r = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(r, R là bán kính đường tròn nội ngoại tiếp ΔABC).

7 □ VÉCTƠ

I - PHÉP CỘNG, PHÉP TRỪ VÉCTƠ PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VÉCTƠ

314. Cho ΔABC, G là trọng tâm tam giác.

Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

b) Ngược lại chứng minh rằng nếu : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ thì G là trọng tâm ΔABC.

c) Chứng minh rằng nếu K là điểm tuỳ ý thì : $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = 3\overrightarrow{KG}$

d) Về phía ngoài ΔABC dựng các hình bình hành : ABIJ, BCPQ, CARS. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$.

315. Cho ΔABC, M là điểm tuỳ ý. Lấy các điểm D, E, F sao cho :

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}$$

1. Chứng minh rằng các điểm D, E, F là điểm cố định.

2. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

$\vec{v} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$

Chứng minh rằng : $\vec{u} = \vec{v}$.

316. Cho ΔABC có 3 góc nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O, có trọng tâm G, trực tâm H, AO cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D.

a) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

b) Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{OI}$

c) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

d) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

e) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

317. Cho tứ giác lồi ABCD

1. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$

2. E, F, O lần lượt là trung điểm AB, CD, EF. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

3. M là điểm bất kỳ. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$$

4. Giả sử tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I sao cho : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành.

318. Cho tứ giác lồi ABCD, I là trung điểm AB, J là trung điểm CD. Chứng minh rằng :

1. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$

2. Gọi K là trung điểm IJ. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AK}$

3. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{DK} = \vec{0}$

319. Cho $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$ với $k \neq -1$.

Chứng minh rằng, với mọi điểm O ta có : $\overrightarrow{OC} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1 + k}$ (*)

320. Cho ΔABC có trọng tâm G. ΔA'B'C' có trọng tâm G'

a) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

b) Ngược lại, chứng minh rằng nếu ta có hệ thức : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ thì ΔABC và ΔA'B'C' có chung trọng tâm G.

c) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$

d) G là trọng tâm ΔABC, lấy trên ba cạnh BC, CA, AB lần lượt ba điểm A_1, B_1, C_1 sao cho :

$$\overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{C_1B}\ ;\ \overrightarrow{BA_1} = k\overrightarrow{A_1C}$$

$$\overrightarrow{CB_1} = k\overrightarrow{B_1A} \text{ với } k \neq -1.$$

Chứng minh rằng : G cũng là trọng tâm của $\Delta A_1B_1C_1$.

321. Cho hình bình hành ABCD, gọi I là giao điểm hai đường chéo, M là điểm bất kỳ. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

c) Gọi P, Q, R, S lần lượt là các điểm thuộc AB, BC, CD, DA sao cho :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{BQ}{BC} = \frac{CR}{CD} = \frac{DS}{DA} = k$$

Chứng minh rằng tứ giác PQRS là hình bình hành.

322. Cho ngũ giác lồi ABCDE ; các điểm K, I, M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm các cạnh : BC, CD, DE, EA, KM, IN.

a) Chứng minh rằng : PQ // AB.

b) Tính tỉ số : $\frac{PQ}{AB}$

323. Cho ΔABC vuông tại A, có AB = 10 ; AC = 5 ; I là trung điểm thuộc cạnh BC sao cho 2IB = 3IC.

a) Xác định điểm I.

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

c) Tính $|\overrightarrow{AI}|$

324. Cho lục giác đều ABCDEF tâm O.

1. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$

2. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF}$

3. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

325. Cho trước hai điểm A, B cố định và các số m, n sao cho $m + n \neq 0$.

1. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I sao cho :

$$m.\overrightarrow{IA} + n.\overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

2. Nếu K là điểm bất kỳ ta có : $m.\overrightarrow{KA} + n.\overrightarrow{KB} = (m + n)\overrightarrow{KI}$

Chú ý :

1. Với 2 số thực $\alpha + \beta \neq 0$, và nếu có $\overrightarrow{MN} = \alpha.\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$

Với A, B là hai điểm cố định thì đường thẳng MN sẽ đi qua điểm cố định I thoả mãn $\alpha.\overrightarrow{IA} + \beta.\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

* Đặc biệt khi $\alpha = \beta \neq 0$ thì I là trung điểm AB.

2. Với 3 điểm A, B, C cho trước và các số $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ (1)

Ta có các kết quả sau :

a) Tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn : $\alpha.\overrightarrow{IA} + \beta.\overrightarrow{IB} + \gamma.\overrightarrow{IC} = 0$ (2)

b) Nếu K là điểm tuỳ ý ta có : $\alpha.\overrightarrow{KA} + \beta.\overrightarrow{KB} + \gamma.\overrightarrow{KC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{KI}$

c) Nếu $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ và ta có : $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$

thì đường thẳng MN sẽ đi qua điểm cố định I thoả mãn :

$$\alpha.\overrightarrow{IA} + \beta.\overrightarrow{IB} + \gamma.\overrightarrow{IC} = 0$$

d) Đặc biệt khi $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$

thì I là trọng tâm của ΔABC (với A, B, C không thẳng hàng).

3. Nếu $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ tồn tại duy nhất điểm I :

$$\alpha.\overrightarrow{IA} + \beta.\overrightarrow{IB} + \gamma.\overrightarrow{IC} = \vec{0} \quad (1)$$

và $$\alpha.\overrightarrow{MA} + \beta.\overrightarrow{MB} + \gamma.\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MI} \quad (2)$$

Công thức (1) và (2) thường dùng để rút gọn một tổng véctơ.

326. Cho ΔABC ; D trung điểm BC, A_2 là trung điểm BD, A_3 là trung điểm DC

1. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{AA_3}$

2. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{AA_3} + \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AD}$

3. F là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{FA}$, K trung điểm EF (E là trung điểm AB)

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

4. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

5. Q là điểm tuỳ ý, chứng minh rằng $2\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$

6. Trên BC lấy điểm M sao cho 3BM = 7CM. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{10}\overrightarrow{AC}$$

7. R là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BR} = \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{AR} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$$

8. N trung điểm AC, xét các trung tuyến AD, BN, CE. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \vec{0}$$

9. Xét ΔABC, dựng điểm S sao cho $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ và điểm P sao cho $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Hỏi trong hai điểm S, P điểm nào thuộc cạnh AC.

10. H là một điểm tuỳ ý. Chứng minh rằng : $\vec{u} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} - 2\overrightarrow{HC}$ là một véctơ cố định.

II - CHỨNG MINH THẲNG HÀNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP VÉCTƠ

327. Cho ΔABC ; M trung điểm AB, N thuộc BC sao cho $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BN}$; K thuộc AC sao cho $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Trên AN lấy điểm I sao cho $16\overrightarrow{AI} = 9\overrightarrow{AN}$.

a) Biểu diễn $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MK}$ theo các véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng : M, I, K thẳng hàng.

328. Cho ΔABC ; P và Q là hai điểm thoả mãn :

$$\overrightarrow{PA} = -3\overrightarrow{PC} ,$$

$$\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QB} + 3\overrightarrow{QC} = \vec{0} .$$

Chứng minh rằng : B, Q, P thẳng hàng.

329. Cho ΔABC, đặt $AB = u$; $AC = v$

Gọi D là điểm đối xứng của B qua C.

a) Biểu diễn $\overrightarrow{AD}$ theo $\vec{u}$, và $\vec{v}$

b) Q và R là hai điểm thoả mãn : $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Biểu diễn $\overrightarrow{RD}$; $\overrightarrow{RQ}$ theo $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

c) Chứng minh rằng : D, Q, R thẳng hàng.

330. Cho ΔABC ; P, Q, R là các điểm xác định bởi :

$$3\overrightarrow{PB} = -4\overrightarrow{PC}$$

$$3\overrightarrow{QA} = 2\overrightarrow{QC}$$

$$2\overrightarrow{RA} = -\overrightarrow{RB}$$

a) Biểu diễn các véctơ $\overrightarrow{PQ}$; $\overrightarrow{QR}$ theo các véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng : P, Q, R thẳng hàng.

331. Cho hình chữ nhật ABCD ; I và J là các điểm thoả mãn :

$$\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \ ; \ \overrightarrow{JC} = 5\overrightarrow{JD}$$

a) Biểu diễn véctơ $\vec{v}$

$$\vec{v} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + 2\overrightarrow{IB} \text{ theo } \overrightarrow{AD}$$

b) Gọi M, P, Q là các điểm thoả mãn hệ thức :

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{MQ} = -5\overrightarrow{MD}$$

Chứng minh rằng :

*) M, I, P thẳng hàng

**) J, M, Q thẳng hàng

332. Cho ΔABC, M là điểm sao cho :

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$$

N là điểm sao cho : $\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

a) Xác định x để 3 điểm A, M, N thẳng hàng

b) Xác định x để M đi qua trung điểm I của BC.

c) Tính tỉ số $\frac{IM}{IN}$

333. Cho ΔABC ; I, J là hai điểm xác định bởi :

$$\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$$

$$3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

a) Biểu diễn $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

b) Gọi G là trọng tâm ΔABC, chứng minh rằng IJ đi qua G.

c) M, N là hai điểm thay đổi sao cho : $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

Tìm điểm K sao cho : $2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

d) Chứng minh rằng : K là điểm cố định.

e) Chứng minh rằng : M, N, K thẳng hàng.

III - XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA MÃN MỘT HỆ THỨC VÉCTƠ

334. Cho ΔABC xác định một điểm thỏa mãn một trong các hệ thức véctơ sau :

a) Điểm M nếu : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

b) Điểm N nếu : $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$

c) $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, xác định I.

d) Điểm K nếu : $2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AB}$

335. Cũng cho như bài 334.

a) Điểm J nếu : $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{BC}$, xác định H.

c) Gọi G là trọng tâm ΔABC, xác định Q nếu : $\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QB} + 3\overrightarrow{QC} = 3\overrightarrow{QG}$

d) Xác định R nếu : $3\overrightarrow{RA} - 2\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} = \vec{0}$

336. Cho 3 điểm A, B, C cố định. Chứng minh rằng chỉ có một điểm M thỏa mãn hệ thức : $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

337. Cho hai điểm A, B cố định.

a) Chứng minh rằng chỉ có điểm I duy nhất thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

b) Cho điểm M di động và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng MN đi qua I.

338. Cho ΔABC, hai điểm M, N thay đổi sao cho : $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$

Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

339. Cho hai điểm A, B cố định và hai số α, β sao cho α + β ≠ 0.

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I sao cho : $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

b) Chứng minh rằng nếu có điểm M bất kỳ ta có : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI}$

340. Cho hình bình hành ABCD ; M là điểm tuỳ ý ; G là trọng tâm ΔABC. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số k và điểm I cố định sao cho các đẳng thức véctơ sau đây thỏa mãn với mọi điểm M.

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{MI}$

b) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MI}$

c) $4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{MI}$

341. Cho ΔABC, dựng điểm M thỏa mãn các hệ thức sau :

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ b) $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MC}$

342. Cho ΔABC, hai điểm M, N thay đổi sao cho : $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$

a) Dựng điểm I thỏa mãn : $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng MN đi qua một điểm cố định khi M di động.

c) Gọi P là trung điểm BN. Chứng minh rằng MP đi qua một điểm cố định khi M di động.

IV - TÌM TẬP HỢP ĐIỂM BẰNG PHƯƠNG PHÁP VÉCTƠ

343. Cho ΔABC, tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn :

a) $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$; $k \in \mathbf{R}, k \neq 0$.

b) $\overrightarrow{MA} + (1-k)\overrightarrow{MB} + (1+k)\overrightarrow{MC} = \vec{0}$; $k \in \mathbf{R}, k \neq 0$.

c) $\overrightarrow{MA} + (1-k)\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC} = \vec{0}$; $k \in \mathbf{R}, k \neq 0$.

344. Cho ΔABC, tìm tập hợp các điểm M sao cho :

a) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ (1)

b) $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ (2)

c) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ (3)

d) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ (4)

345. Cũng cho như bài 344 :

a) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = \frac{3}{2}|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$ (5)

b) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$ (6)

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})$; $k \in \mathbf{R}$ (7)

d) Gọi I là điểm sao cho : $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Xác định điểm I.

f) Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn :

$$|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| \quad (8)$$

i) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MA}|$ (9)

p) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ (10)

346. Cho hình bình hành ABCD, tâm O và số thực $m > 0$. Tìm tập hợp các điểm K sao cho :

$$|\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}| = m > 0 \quad (1)$$

347. Cho ΔABC và các điểm I, J sao cho

*) $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

**) $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$

a) Tìm tập hợp điểm M sao cho : $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$

b) Tìm tập hợp điểm M sao cho :

$$|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}| = 2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$$

348. Cho hai điểm A, B cố định và AB = 2a. Tìm tập hợp các điểm M sao cho : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 8a^2$.

349. Cho tứ giác ABCD. Tìm tập hợp điểm M sao cho :

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}) = \vec{0}$$

Cho biết I, J là hai điểm thỏa mãn : $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{JC} + 3\overrightarrow{JD} = \vec{0}$

350. Cho ΔABC, tìm tập hợp điểm M sao cho : $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$

351. Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn một trong các điều kiện sau :

a) $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MC}$ b) $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MC} = 0$

c) $\overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MB}\,.\,\overrightarrow{MC}$

352. Cho ΔABC đều, cạnh bằng a, G là trọng tâm ΔABC, I là điểm xác định bởi $2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

a) Xác định I.

b) Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn một trong các điều kiện sau :

*) $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 4a^2$

**) $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}\,.\,\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\,.\,\overrightarrow{MA} = a^2$.

V - ĐỘ DÀI ĐẠI SỐ CỦA VÉCTƠ TRÊN MỘT TRỤC

353. Trên trục x'Ox cho hai điểm A và B lần lượt có toạ độ A (a) ; B (b)

a) Tìm tọa độ trung điểm I của AB.

b) Tìm tọa độ M chia đoạn AB theo tỉ số $k \neq 1$.

354. Cho A(−1) ; B(2) ; C (5) trên trục x'Ox. Tìm D (x) sao cho :

a) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ b) $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$

355. Cho A(5) ; B(−3) ; C(x) trên trục x'Ox.

a) Tìm toạ độ C đối xứng của A qua B

b) Tính độ dài CA, 2AB

c) O là gốc toạ độ. Tính độ dài của 2AB + OC

356. Trên trục x'Ox cho 3 điểm : A(a) ; B(b) ; C(c)

Xác định toạ độ A, B, C nếu ta có.:

$$\begin{cases} \overline{AB} = -3 \\ \overline{BC} = 6 \\ 2\,\overline{OC} + 3\,\overline{AB} - 4\overline{OA} = -7 \end{cases}$$

357. Trên trục x'Ox cho A(a) ; B(b) ; C(c) ; D(d) thoả mãn hệ thức :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

a) Chứng minh rằng : $2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$

b) Gọi I là trung điểm AB. Chứng minh rằng : $IA^2 = IB^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$

358. Trên trục x'Ox cho 4 điểm A, B, C, D có A(a) ; B(b) ; C(c) ; D (d)

a) Chứng minh rằng nếu : $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ thì ta có :

$$\overline{CA}.\overline{DB} + \overline{DA}.\overline{CB} = 0$$

b) $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0$

c) $DA^2.\overline{BC} + DB^2.\overline{CA} + DC^2.\overline{AB} + \overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0$

359. Cho 4 điểm A, B, C, D trên trục x'Ox: A(a) ; B(b) ; C(c) ; D(d) và ta có :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

I trung điểm AB ; J trung điểm CD. Chứng minh rằng :

a) $\overline{AB}.\overline{CD} = 4\overline{BC}.\overline{DA}$ b) $\overline{AB}^2.\overline{CD}^2 = 4\overline{IJ}^2$ c) $\frac{2}{\overline{CD}} = \frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CB}}$

VI - TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ

360. Cho ΔABC có AB = 2, AC = 3, $\widehat{A} = 120^0$.

a) Tính độ dài cạnh BC.

b) Tính độ dài trung tuyến AM.

c) Gọi I và J là các điểm thoả mãn hệ thức :

$$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

Tính độ dài IJ.

d) Cho cạnh AB = c ; BC = a ; AC = b. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ theo a, b, c.

e) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$ theo a, b, c.

361. Cho ΔABC đều, cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng sau theo a:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

362. Cũng cho như bài 361.

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ b) $\overrightarrow{AB}(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC})$

c) Trên AB lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$; trên BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; trên CA lấy điểm K sao cho $\overrightarrow{AK} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$. Biểu diễn $\overrightarrow{MK}$ và $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng MK vuông góc AN.

363. Cho ΔABC, M thuộc cạnh BC sao cho

$$\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

a) Xác định điểm M.

b) ΔABC có các trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

c) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB} = 0$

d) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}^2 - \overrightarrow{DB}^2$

e) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2)$

f) Chứng minh rằng:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$$

364. Cho ΔABC, có đường cao AH và $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH}$

1. Chứng minh rằng ΔABC vuông tại A.

2. Giả sử ΔABC vuông tại A, AB = c, $\widehat{C} = 60^o$. Kẻ đường cao AH ; M là trung điểm BC . Tính các tích vô hướng sau :

a) $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$ b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ c) $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

365. Cho ΔABC đều, cạnh bằng a, M thuộc BC sao cho $BM = \frac{a}{3}$; N thuộc AC sao cho $CN = \frac{2a}{3}$; P thuộc AB sao cho AP = x $(0 < x < a)$.

a) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Biểu diễn $\overrightarrow{PN}$ theo x, a, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

c) Tìm x để AM vuông góc với PN.

d) Giả sử ΔABC đều, nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Chứng minh rằng : Với mọi điểm Q bất kỳ thuộc đường tròn (O) ta có :

$$QA^2 + QB^2 + QC^2 = 6R^2$$

366. Cho hình bình hành ABCD với $AB = \sqrt{3}$ và AD = 1 ; $\widehat{BAD} = 30^o$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

b) Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

c) Tính độ dài AC, BD.

d) Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$

e) Giả sử AB = a, BC = b. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ theo a và b.

f) Dùng tích vô hướng của hai véc tơ chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành có các cạnh a và b thì điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD là hình thoi là a = b.

367. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O có các cạnh AB = c, BC = a, CA=b. M là trung điểm BC, H là trực tâm ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA'}.\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HB'}.\overrightarrow{HB}$ với AA', BB', CC' là các đường cao xuất phát lần lượt tại A, B, C.

b) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

c) Ngược lại, nếu ta có : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

thì H là trực tâm ΔABC.

d*) Chứng minh rằng nếu OH vuông góc AM thì $b^2 + c^2 = 2a^2$.

368. Cho 4 điểm A, B, C, D

a) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ (*)

b) Từ hệ thức (*) chứng minh rằng trong ΔABC ba đường cao đồng quy tại trực tâm H.

c*) H là trực tâm ΔABC và M là trung điểm BC. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$$

369. Cho ΔABC có AB = 5 ; BC = 7 ; CA = 8.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b) Tính $\cos A$

c) Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

d) D thuộc cạnh CA sao cho CD = 3. Tính $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$

e) Giả sử AB = c, BC = a, CA = b. ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R, G là trọng tâm ΔABC. Chứng minh rằng :

*) $GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2(\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}) = 0$

**) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$

***) Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + c^9 = 9\,(R^2 - OG^2)$

370. Cho các véc tơ $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$.

Đặt $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$

$\vec{v} = 7\vec{a} - 5\vec{b}$

$\vec{w} = \vec{a} - 4\vec{b}$

$\vec{s} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$

Cho biết : $\vec{u}$ vuông góc $\vec{v}$; $\vec{w}$ vuông góc $\vec{s}$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

371. Cho hình thang vuông ABCD vuông tại A và tại B, đáy lớn BC ; biết AB=a, BC = b, AD = d, I là trung điểm AB.

1. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

2. Tìm hệ thức giữa a, b, d để tam giác ICD vuông tại I.

372. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi K là hình chiếu của B xuống AC, N trung điểm CD, M là trung điểm AK.

a) Chứng minh rằng BM vuông góc MN.

b) Giả sử AB = 2a ; BC = 3a ; E thuộc AD sao cho EA = a. I là trung điểm CE. Chứng minh rằng : BE vuông góc AI.

373. Cho tứ giác ABCD, gọi I là trung điểm AC, J trung điểm BD.

a) Chứng minh rằng : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$

b) Tìm điều kiện để tứ giác ABCD là hình bình hành.

c) Giả sử ta có điều kiện : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = \vec{0}$.
Chứng minh rằng : tứ giác ABCD là hình bình hành.

374. Cho ΔABC đều, cạnh bằng a, có đường cao AH, trọng tâm G.

1. Tính các tích vô hướng sau đây theo a.

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}$ c) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BA}$

2. Gọi I là điểm thoả mãn hệ thức : $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng tứ giác BCIG là hình bình hành.

375. Cho ΔABC, AB = 3, AC = 5, BC = 7. M, N là hai điểm được xác định sao cho

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ;\quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) Tính cosA c) Tính độ dài MN.

376. Cho tứ giác ABCD, chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành thì các điều kiện sau đây là tương đương:

a) $AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

c) Với k là một số thực xác định, và với mọi điểm M :

$$(MA^2 + MC^2) - (MB^2 + MD^2) = k$$

377. Cho hình thang vuông ABCD, vuông tại A và B, AB = h ; AD = a ; BC = b với b > a. Tìm điều kiện giữa a, b, h để :

1. AC vuông góc với BD.

2. I là trung điểm CD để góc AIB = 90^0

378. Cho $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$. Hỏi các mệnh đề sau đây đúng hay sai :

a) Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $\vec{a}.\vec{c} = \vec{b}.\vec{c}$

b) Nếu $\vec{a}.\vec{c} = \vec{b}.\vec{c}$ thì $\vec{a} = \vec{b}$

c) Nếu $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ thì $\vec{a}$ vuông góc $\vec{b}$

d) Nếu $|2\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} + 2\vec{b}|$ thì $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

e) $\vec{a}(\vec{b}.\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ có đúng với mọi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không?

f) Nếu $\vec{a} \neq \vec{b}$ thì $\vec{a}.\vec{c} \neq \vec{b}.\vec{c}$

379. Cho ΔABC không có góc vuông :

a) Gọi AA' là đường cao của ΔABC xuất phát từ A. Chứng minh rằng :

$$\text{tg}B.\overrightarrow{A'B} + \text{tg}C.\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$$

b) Gọi H là trực tâm ΔABC. Chứng minh rằng :

$$\text{tg}A.\overrightarrow{HA} + \text{tg}B.\overrightarrow{HB} + \text{tg}C.\overrightarrow{HC} = \vec{0}$$

380. Cho ΔABC có các góc A, B, C .

a) Chứng minh rằng : $\cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$

Dấu = xảy ra khi nào ?

b) ΔABC có đặc điểm gì, nếu thoả mãn một trong các điều kiện sau :

*) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$

*) Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$

biết $\vec{u} \perp \vec{v}$

381. Tứ giác ABCD có đặc điểm gì nếu thoả mãn một trong các điều kiện sau :

a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC}$ b) $\overrightarrow{DB} = m\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$; $m \in \mathbf{R}$

382. Cho hình vuông ABCD. M thuộc AC sao cho $AM = \dfrac{1}{4}AC$; N là trung điểm DC.

a) Chứng minhg rằng ΔBMN vuông cân.

b) Giả sử cạnh hình vuông bằng a, trên BD lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BM}$; N là trung điểm CD. Chứng minh rằng : MA vuông góc MN.

383. Cho hình vuông ABCD, E và F là các điểm xác định bởi : $\overrightarrow{BE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$;

$\overrightarrow{CF} = \dfrac{-1}{2}\overrightarrow{CD}$; AE cắt BF tại I. Chứng minh rằng ΔAIC vuông tại I.

384. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình chữ nhật nếu :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

385. Cho hình bình hành ABCD.

a) Biết rằng với mọi điểm M ta có : $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2$

Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

b) Đặt $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Chứng minh rằng nếu :

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$

thì tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

c) Nếu đặt AB = a, BC = b ; AC = m ; BD = n. Chứng minh rằng :

$$|a^2 - b^2| < m.n$$

8 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ ĐƯỜNG TRÒN

I - HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

386. a) Cho $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in (90^o ;180^o)$. Tính :

$$A = 5\cos x + 3\sin x + \tan x = 2\cot x$$

b) Cho $\tan(180^0 - x) - \cot(90^0 - x) = 1$. Tìm sinx, cosx, tanx và cotx.

387. Cho tgx = 2. Tính $B = \dfrac{3\sin x + 2\cos x}{\cos x - 3\sin x}$ và $C = 3\cos^2 x - 4\sin x\cos x + 5\sin^2 x$.

388. Cho A, B, C là 3 góc của tam giác. Hãy xét dấu các biểu thức sau :

$D = \sin A\sin B\sin C$ $\qquad$ $E = \cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$F = \cos A\cos B\cos C$ $\qquad$ $G = \tan A\tan B\tan C$

389. Tìm GTLN và GTNN của các biểu thức : Với $x \in [0 ;180^o]$

$A = 3 + 5\sin x$ $\qquad$ $B = 3 - 2\cos x$

$C = 2\sin x + 3\cos^2 x - 4$ $\qquad$ $D = 3\sin x + 4\cos x$

390. Chứng minh các biểu thức sau có giá trị không thay đổi khi x thay đổi :

$$A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$$

$$B = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x - \cos^6 x)$$

$$C = \cos^2 x\cot^2 x + 2\cos^2 x - \cot^2 x + \sin^2 x$$

391. Cho ΔABC có 3 cạnh là a, b, c thoả mãn $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh : ΔABC có 3 góc đều nhọn và $2\sin^2 A = \tan B\tan C$.

392. Nếu ΔABC có $a^6 = b^6 + c^6$ thì ΔABC có 3 góc nhọn.

393. Tính cạnh thứ 3 của mỗi tam giác trong các trường hợp sau :

a) $a = 5$; $b = 10$; $\hat{C} = 510$

b) $a = \sqrt{7}$; $c = 4$; $\hat{B} = 1200$

c) $a = 0{,}5$; $c = 13$; $\hat{A} = 320$

394. Tính cạnh và góc còn lại của tam giác :

a) $a = 50$; $\hat{B} = 33^0$; $\hat{C} = 60^o$

b) $a = 13$; $b = 10$; $\hat{A} = 67^o23'$ hoặc $\hat{A} = 120^o$.

395. a) Cho ΔABC có $\cos A = \dfrac{3}{5}$; $b = 5$; $c = 7$. Tính a, $\hat{B}$, $S_{\Delta ABC}$, R và r.

b) Cho ΔABC có $c = 3$; $b = 4$; $S = 3\sqrt{3}$. Tính A, a và R.

396. Cho ΔABC có $a = 15$; $b = 20$ và $\hat{C} = 60^o$. Tính c, S, R, h_a, r.

397. Cho ΔABC có 2 trung tuyến BM, CN cắt nhau tại G. Biết $BM = 6$; $CN = 9$, góc BGC là 120^o. Tính 3 cạnh của tam giác ? Tính diện tích của tam giác ?

398. Tính độ dài đường phân giác trong của tam giác theo độ dài 3 cạnh của nó.

399. Chứng minh trong mọi tam giác ta luôn có :

a) $b = c\cos A + a\cos C$. b) $\cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

c) $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$

d) $\dfrac{b^2 - c^2}{a}\cos A + \dfrac{c^2 - a^2}{b}\cos B + \dfrac{a^2 - b^2}{c}\cos C = 0$

400. Chứng minh trong mọi tam giác ta luôn có :

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

401. Cho ΔABC có $\dfrac{c}{b} = \dfrac{m_b}{m_c} \neq 1$. Chứng minh : $b^2 + c^2 = 2a^2$ và suy ra

$2\cot A = \cot B + \cot C$.

402. ΔABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 2$ và $\cot A = 2\cot B = 3\cot C$. Chứng minh ΔABC nhọn và tính các cạnh của tam giác đó.

403. Chứng minh khoảng cách từ trọng tâm của tam giác đến đường tròn ngoại tiếp tam giác thoả mãn : $GO^2 = R^2 - \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$.

404. Chứng minh khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp đến tâm đường tròn ngoại tiếp thoả mãn : $IO^2 = R^2 - 2Rr$.

405. Chứng minh khoảng cách từ trực tâm của tam giác đến đường tròn ngoại tiếp thoả mãn : $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

406. Tìm quỹ tích những điểm mà $MA^2 + MB^2 = 2AB^2$ với A, B cho trước.

407. Tìm quỹ tích những điểm mà $MA^2 + 2MB^2 = 2AB^2$ với A, B cho trước.

408. Chứng minh hai trung tuyến BM và CN của ΔABC mà $BM \perp CN$ khi và chỉ khi : $\cot A = 2(\cot B + \cot C)$.

409. ΔABC là tam giác gì nếu có :

a) $\dfrac{\sin B}{\sin C} = 2\cos A$ b) $S = p(p - a)$ c) $r = r_a - r_b - r_c$;

410. ΔABC đều nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn :

a) $h_a + h_b + h_c = 9r$ b) $r_a + r_b + r_c = 9r$ c) $\begin{cases} a = 2b\cos A \\ a^2 = \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} \end{cases}$

411. a) Nếu $2\cos B\sin C = \sin A$ thì ΔABC cân.

b) Nếu $\begin{cases}\sin A + \sin B = 2\sin C \\ \cos A + \cos B = 2\cos C\end{cases}$ thì ΔABC đều.

II - HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

412. Cho ΔABC có các đường cao AA', BB', CC' đồng quy tại H.

a) Chứng minh A có cùng phương tích đối với 3 đường tròn đường kính BC, CH, HB.

b) Chứng minh H có cùng phương tích đối với 3 đường tròn đường kính BC, CA, AB.

c) Tìm phương tích của A' đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $\overrightarrow{A'A}.\overrightarrow{A'H} = -\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{A'C}$.

413. Cho đường tròn tâm O, bán kính R, có đường kính AB thay đổi. Chứng minh $\mathscr{P}_{M/(O\,;\,R)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

414. Cho đường tròn (O ; R), AB là đường kính di động của (O). Cho M không nằm trên đường tròn. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔABM luôn đi qua 1 điểm cố định khác M.

415. Cho AB = 8 và hai đường tròn (A ;4) ; (B ;3). Tìm quỹ tích các điểm M thỏa mãn $\mathscr{P}_{M/A} + \mathscr{P}_{M/B} = 15$.

416. Cho đường thẳng Δ và một điểm S không thuộc Δ. M là điểm di động trên Δ sao cho $\overline{SM}.\overline{SN} = k$ (k là hệ số $\neq 0$) ($N \in SM$). Tìm quỹ tích điểm N.

417. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. I là tâm đường tròn nội tiếp, J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC. Chứng minh :

$$OI^2 = R^2 - 2Rr, \quad OJ^2 = R^2 + 2Rr_a$$

418. Cho đường tròn (O ; R) và đường thẳng d không có điểm chung. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống (d). M là điểm tùy ý trên (d) và khác H. Từ M ta kẻ tới (O ;R) các tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm). Gọi N là giao điểm của MO và AB, K là giao điểm của OH và AB. Chứng minh : $\overline{ON}.\overline{OM} = \overline{OK}.\overline{OH} = R^2$.

419. Cho ΔABC cân tại A và một điểm M di chuyển trên cạnh BC. Tia AM cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại điểm N.

a) Chứng minh rằng : $AM.AN = AB^2$. Từ đó suy ra AM.AN không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên BC.

b) Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến tại điểm B của đường tròn ngoại tiếp ΔBMN và AC là tiếp tuyến tại điểm C của đường tròn ngoại tiếp ΔCMN.

420. Cho đường tròn đường kính AA'. Qua một điểm P nằm trên đường thẳng AA', ta kẻ một đường thẳng (d) vuông góc với AA'. Một cát tuyến qua P cắt đường tròn ở M, M'. Các đường thẳng AM, AM' cắt đường thẳng (d) theo thứ tự tại các điểm N, N'. Chứng minh rằng 4 điểm M, M', N, N' nằm trên 1 đường tròn.

421. Cho (O ; R) đường kính AB. Trên tiếp tuyến với (O) tại B lấy 2 điểm phân biệt P, Q. AP và AQ cắt đường tròn (O) tại P', Q'.

a) Chứng minh rằng P, Q, P', Q' cùng nằm trên một đường tròn, kí hiệu là (O'). Tìm phương tích của điểm A đối với (O').

b) Cho P, Q di động thỏa mãn $\overline{BP}.\overline{BQ} = k^2$ (k không đổi và khác 0). Chứng minh rằng tâm của các đường tròn (O') luôn nằm trên 1 đường thẳng cố định.

422. Cho ba điểm A, B, C theo thứ tự thẳng hàng. (O) là đường tròn thay đổi đi qua hai điểm B, C.

a) Tìm tập hợp các tiếp điểm T, T' vẽ từ A đến (O) khi (O) thay đổi nhưng vẫn đi qua B, C.

b) Gọi M là điểm xuyên tâm đối của B trên (O). P là giao điểm khác của AM với (O). Chứng minh rằng : $\overline{AM}.\overline{AP} = AO^2 - OC^2$.

423. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 24. Trên OB lấy OH = 4 (H ở giữa O, B). Đường vuông góc với AB tại H cắt (O) tại C và D. Vẽ đường thẳng OI vuông góc với AD cắt CD ở E, cắt cung nhỏ AD ở F, CF cắt AB ở J, cắt AD ở K.

a) Tính $\mathcal{P}_{H/(O)}$; AD ; CD.

b) Chứng minh $\overline{OE}.\overline{OI} = \overline{OH}.\overline{OA}$ rồi tính OE.

424. Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Đường kính AB vuông góc với đường thẳng d tại H (d không cắt đường tròn). Qua H vẽ đường thẳng d' cắt đường tròn tại M và N. Các đường thẳng AM và AN cắt d lần lượt tại M' và N'.

a) Chứng minh $\overline{AB}.\overline{AH} = \overline{AM}.\overline{AM'} = \overline{AN}.\overline{AN'}$

b) Chứng minh $\overline{HA}.\overline{HB} = \overline{HM}.\overline{HN} = \overline{HM'}.\overline{HN'}$

c) Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAM'N'. Chứng minh $\overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{AB} = 2R^2$. Tìm tập hợp điểm O' khi đường thẳng d' quay quanh điểm H.

425. Cho đường tròn tâm O bán kính R và 1 dây AB cố định. H là trung điểm của AB. Từ điểm M trên đường thẳng AB (phần ở ngoài đường tròn) kẻ 2 tiếp tuyến ME và MF. Đường thẳng EF cắt MO ở K và cắt đường thẳng OH ở I.

a) Chứng minh $\overline{OM}.\overline{OK} = R^2$

b) Cho R = 20 ; OH = 12 ; MB = 8. Tính $\mathcal{P}_{M/(O)}$; MO

c) Chứng minh $\overline{OK}.\overline{OM} = \overline{OH}.\overline{OI}$

426. Cho ΔABC nội tiếp (O ; R). Gọi M là trung điểm BC. Đường tròn (O') ngoại tiếp ΔAMO cắt BC tại E và cắt (O) tại D, AD cắt BC tại F.

a) Cho FA = 18 ; FD = 3 ; BC = 15. Tính FB, FC.

b) Chứng minh rằng $\overline{FB}.\overline{FC} = \overline{FE}.\overline{FM}$

c) Chứng minh rằng $\overline{EB}.\overline{EC} = \overline{EF}.\overline{EM}$

d) Chứng minh rằng $\overline{EB}.\overline{EC} = EA^2$

e) Chứng minh rằng đường tròn (AMF) tiếp xúc EA.

427. Cho 3 điểm A, B, C theo thứ tự thẳng hàng, một đường tròn di động qua A, B có tâm O, bán kính R. Từ C kẻ các tiếp tuyến CM, CN (M, N là tiếp điểm). Gọi H, I là trung điểm của MN, AB.

a) Tính CA, CB. Biết $AB = 8$; $R = 5$; $OC = 15$

b) Gọi P là giao điểm của MN và AB. Chứng minh : $\overline{CO}.\overline{CH} = \overline{CA}.\overline{CB}$; $\overline{CP}.\overline{CI} = \overline{CA}.\overline{CB}$. Từ đó chứng minh H chạy trên 1 đường cố định.

c) Chứng minh rằng trọng tâm của ΔAHB thuộc một đường tròn cố định. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

428. Cho 3 điểm A, B, C theo thứ tự thẳng hàng, một đường tròn di động qua A, B có tâm O, bán kính R. Cho E, F trên tia OC sao cho $\overline{OE}.\overline{OF} = R^2$. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{\mathscr{P}_{E/(O)}} + \dfrac{1}{\mathscr{P}_{F/(O)}} = -\dfrac{1}{R^2}$

429. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC. Chứng minh rằng khi AH cố định còn B, C thay đổi thì :

a) Tứ giác BCFE nội tiếp được và EF luôn đi qua một điểm cố định

b) Ba điểm A, M, I thẳng hàng trong đó M là giao của đường tròn đường kính AH với đường tròn ngoại tiếp ΔABC ($M \neq A$) và $EF \cap AB = I$.

c) Đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCFE luôn đi qua 2 điểm cố định.

430. Cho nửa đường tròn đường kính AB, tâm O. Trên đường thẳng tiếp tuyến tại A lấy một điểm $S \neq A$. Từ S vẽ tiếp tuyến ST cắt đường AB tại C.

a) Cho $AB = 12$, góc $AST = 60^0$. Tính SC, OC, phương tích của C với (O)

b) Nối OT cắt SA tại D. Chứng minh rằng $SO \perp CD$

c) Gọi $M = SO \cap AT$. Tìm quỹ tích điểm M khi S di chuyển trên tiếp tuyến tại A ($S \neq A$)

d) Gọi I là trung điểm của AC, đường tròn ngoại tiếp ΔSOI cắt SA, SC lần lượt tại A', C', cắt (O) tại hai điểm P, Q. Chứng minh rằng :

+ P, M, Q thẳng hàng
+ AA' = CC'

431. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O), M là trung điểm cạnh BC. Đường tròn ngoại tiếp ΔAOM cắt BC tại điểm thứ hai là E, cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D, $AD \cap BC = I$. Chứng minh rằng :

a) $\overline{FB}.\overline{FC} = \overline{FE}.\overline{FM}$

b) $\overline{EB}.\overline{EC} = \overline{EF}.\overline{EM}$

c) EA là đường tròn ngoại tiếp ΔAFM

432. Cho ΔABC có BC = a ; AC = b ; AB = c. AD là đường phân giác, AM là đường trung tuyến. Đường tròn ngoại tiếp ΔADM cắt AB, AC lần lượt tại E, F.

a) Chứng minh rằng : $\mathscr{P}_{B/(ADM)} + \mathscr{P}_{C/(ADM)} = \dfrac{a^2}{2}$

b) Chứng minh rằng : BE = CF

c) Tính phương tích của điểm G là trọng tâm ΔABC, điểm I là tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC với đường tròn (ABC).

433. Cho tứ giác ABCD có các cạnh AB, CD kéo dài cắt nhau ở E và các cạnh AD, BC kéo dài cắt nhau ở F. Chứng minh rằng các trung điểm của các đoạn AC, BD và EF cùng thuộc một đường thẳng.

434. Chứng minh rằng trong tam giác, trung điểm các cạnh, chân các đường cao cùng thuộc một đường tròn (O) và đường tròn (O) cũng đi qua trung điểm của mỗi đoạn thẳng nối một đỉnh với trực tâm tam giác.

435. Cho ΔABC có trọng tâm G, ba cạnh là a, b, c. Đường trung tuyến kéo dài cắt đường tròn (ABC) ở ba điểm A', B', C'.

a) Chứng minh : $\mathscr{P}_{A/(GBC)} + \mathscr{P}_{B/(GAC)} + \mathscr{P}_{C/(GAB)} = a^2 + b^2 + c^2$

b) Chứng minh :

$$\frac{1}{A'G^2} + \frac{1}{B'G^2} + \frac{1}{C'G^2} = \frac{27}{a^2 + b^2 + c^2}$$

436. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O) có đường cao AE = 3a (E thuộc đoạn BC) ; EB = a ; EC = 3a.

a) Tính $\mathscr{P}_{H/(O)}$ và $\mathscr{P}_{G/(O)}$ (H và G lần lượt là trực tâm, trọng tâm của ΔABC)

b) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC ở K. Tính $\mathscr{P}_{K/(O)}$

9 □ PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

I - TRỤC TOẠ ĐỘ. HỆ TOẠ ĐỘ

437. 1) Thế nào là trục toạ độ ? Cho biết toạ độ của một véctơ và một điểm trên trục.

2) Vẽ hệ trục toạ độ. Cho biết tọa độ của một véctơ và một điểm trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

438. Cho $\vec{a_1} = (x_1 ; y_1)$, $\vec{a_2} = (x_2 ; y_2)$. Chứng minh rằng :

a) $\vec{a_1} + \vec{a_2} = (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2)$

b) $k\vec{a_1} = (kx_1 ; ky_1)$

c) $\vec{a_1}.\vec{a_2} = x_1x_2 + y_1y_2$

439. Cho hai véctơ $\vec{a} = (x ; y)$, $\vec{a'} = (x' ; y')$.

a) Nêu điều kiện cần và đủ để $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{a'}$.

b) Tính độ dài của véctơ $\vec{a}$.

c) Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ (với $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$). Suy ra điều kiện cần và đủ để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

440. Cho hai điểm $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$.

a) Tìm toạ độ của véctơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm độ dài của véctơ $\overrightarrow{AB}$.

441. a) Chứng minh rằng nếu điểm $M(x ; y)$ chia đoạn thẳng AB $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$ theo tỉ số k (tức là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$) thì toạ độ của điểm M là :

$$x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k}, \quad y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k} \quad (k \neq 1)$$

Từ đó suy ra $(x ; y)$ khi M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b) Cho tam giác ABC $A(x_A ; y_B)$, $B(x_B ; y_B)$, $C(x_C ; y_C)$. Trọng tâm $G(x_G ; y_G)$. Chứng minh rằng :

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

442. Trong hệ toạ độ Oxy, cho $\vec{m} = (1 ; 2)$, $\vec{n} = (-1 ; 0)$, $\vec{p} = (-1 ; 3)$.

a) Tìm toạ độ của các véctơ sau :

$$\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n} + \vec{p} ;$$

$$\vec{b} = 3(\vec{m} + \vec{n}) - \vec{p} ;$$

$$\vec{c} = \vec{m} - \vec{n} + 2\vec{p}$$

b) Tìm các tích vô hướng $\vec{m}.\vec{n}$, $\vec{m}.\vec{p}$, $\vec{n}.\vec{p}$.

c) Tìm góc của các cặp vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, $\vec{a}$ và $\vec{c}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

d) Tìm α và β để $\vec{b} = \alpha\vec{m} + \beta\vec{n}$.

443. Cho ba điểm $A(0 ; 1)$, $B(2 ; 3)$, $C(5 ; 0)$.

a) Chứng minh rằng 3 điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm chu vi và diện tích của tam giác ABC.

444. Trong mặt phẳng toạ độ cho ba điểm $M_1(x_1 ; y_1)$, $M_2(x_2 ; y_2)$, $M_3(x_3 ; y_3)$ lần lượt là các trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Hãy tìm toạ độ các điểm A, B, C.

(Trích đề thi ĐHQG Hà Nội 1996)

445. Cho tam giác vuông cân ABC (AB = AC = 1). Tìm giá trị tổng sau :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}.$$

II - PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

446. a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng và chỉ ra toạ độ véctơ pháp tuyến của nó.

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1 ; 2)$ và có véctơ pháp tuyến $(3 ; -4)$.

c) Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$.

d) Viết phương trình đường thẳng :

*) trùng hoặc song song với trục Ox ;

**) trùng hoặc song song với trục Oy ;

***) đi qua tốc toạ độ.

447. Cho hai đường thẳng $(\Delta_1) : A_1x + B_1y + C_1 = 0.$

$$(\Delta_2) : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Khi nào (Δ_1) cắt (Δ_2), (Δ_1) song song với (Δ_2), (Δ_1) trùng với (Δ_2).

448. a) Tìm toạ độ điểm M' đối xứng với điểm $M(x_M ; y_M)$ qua đường thẳng (d) : $Ax + By + C = 0$.

b) Tìm toạ độ điểm M' đối xứng với điểm M(1 ; –2) qua đường thẳng

$$(d) : 3x + 2y - 5 = 0.$$

449. Cho hai điểm M(5 ; 5), N(1 ; 4) và đường thẳng (d) : $x + 2y - 6 = 0$. Tìm điểm A trên đường thẳng (d) sao cho :

a) |AM – AN| lớn nhất.

b) MA + MB nhỏ nhất.

450. Cho tam giác ABC có đường phân giác của góc A là (d) : $x + y + 2 = 0$. Đỉnh B(1 ; 3), đỉnh C(2 ; 0). Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

451. Tìm toạ độ tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết trung điểm của các cạnh AB, BC, AC tương ứng là C'(5 ; 1), A'(1 ; 1), B'(3 ; 7).

452. Cho ba đường thẳng :

$$(d_1) : x - y + 1 = 0$$

$$(d_2) : 3x + 2y - 7 = 0$$

$$(d_3) : x + 4y - 19 = 0$$

đôi một cắt nhau tại A, B, C. Tìm toạ độ trực tâm của tam giác ABC.

453. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC đỉnh C(4 ; –1), đường cao và trung tuyến kẻ từ một đỉnh có phương trình tương ứng là :

$$2x - 3y + 12 = 0 \text{ và } 2x + 3y = 0$$

(Trích đề thi vào ĐHVH, 1998)

454. Cho hai điểm M(1 ; 1), N(7 ; 5) và đường thẳng (d) : $x + y - 8 = 0$.

a) Tìm điểm $P \in (d)$ sao cho ΔPMN cân đỉnh P.

b) Tìm điểm $Q \in (d)$ sao cho ΔQMN vuông đỉnh Q.

455. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hai đường thẳng

$$(d_1) : x - y = 0 \quad \text{và} \quad (d_2) : 2x + y - 1 = 0$$

Tìm toạ độ các đỉnh hình vuông ABCD, biết rằng đỉnh A thuộc (d_1), đỉnh C thuộc (d_2) và các đỉnh B, D thuộc trục hoành.

(Trích đề thi Đại học khối A, 2005)

456. Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : 2x - y - 2 = 0$, $\Delta_2 : kx - y - \frac{3}{2} = 0$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

a) Tìm k để :

- Δ_1 song song với Δ_2
- Δ_1 cắt Δ_2
- Δ_1 vuông góc với Δ_2

b) Trong trường hợp (Δ_1) vuông góc với (Δ_2) cho điểm M(3 ; 0). Viết phương trình đường thẳng qua M cắt (Δ_1), (Δ_2) tại hai điểm nhận M là trung điểm.

457. Cho hai điểm A(6 ; 1), B(0 ; 3) và đường thẳng $(\Delta_1) : 3x - 2y - 5 = 0$.

a) Viết phương trình đường thẳng (Δ_2) qua hai điểm A, B.

b) Viết phương trình đường thẳng (Δ_3) và (Δ_4) theo thứ tự qua A, B và vuông góc với (Δ_1). Có nhận xét gì về quan hệ giữa (Δ_3) và (Δ_4).

III - PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

458. 1. Thế nào là véctơ chỉ phương của một đường thẳng.

2. a) Viết phương trình tham số của đường thẳng qua điểm $A(x_0 ; y_0)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u} = (a ; b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ qua điểm A(1 ; –1) và có véctơ chỉ phương $\vec{u} = (3 ; -1)$.

c) Viết phương trình tham số của đường thẳng qua hai điểm $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$.

459. Cho phương trình đường thẳng (Δ) : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ $t \in R$

Viết phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ).

460. Đường thẳng (Δ) có phương trình tổng quát : $3x + 4y + 1 = 0$. Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của (Δ).

461. Cho phương trình tham số của đường thẳng (Δ) :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$$

a) Tìm véctơ chỉ phương của đường thẳng (Δ).

b) Tìm véctơ pháp tuyến của đường thẳng (Δ).

462. Xét vị trí tương đối của cặp đường thẳng sau và tìm toạ độ giao điểm của chúng (nếu có):

a) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$ và $x - 2y + 1 = 0$

b) $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = k \\ y = 2 - 2k \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$ và $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+2}{3}$

463. Tìm phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng :

$$(\Delta_1) : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 - t \end{cases} \quad (\Delta_2) : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 7 - 2t \end{cases}$$

và chắn trên hai trục toạ độ những đoạn bằng nhau.

464. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho tam giác ABC và điểm M(–1 ; 1) là trung điểm của cạnh AB. Hai cạnh AC và BC theo thứ tự nằm trên hai đường thẳng : $(\Delta_1) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$, $(\Delta_2) : x + 3y - 3 = 0$.

a) Xác định toạ độ ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC và viết phương trình đường cao AH.

b) Tính diện tích tam giác ABC.

465. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Đềcác vuông góc Oxy cho điểm A(8 ; 6). Lập phương trình tham số của đường thẳng qua A và tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 12.

466. Trên mặt phẳng với hệ trục toạ độ vuông góc Oxy cho hai điểm B(2 ; –1), C(1 ; –2). Trọng tâm G của tam giác ABC nằm trên đường thẳng $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$, diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{1}{2}$. Tìm toạ độ điểm A.

467. Cho đường thẳng $(\Delta_1) : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -\dfrac{3}{16} + 3t \end{cases}$ và điểm $M\left(0 ; \dfrac{55}{16}\right)$.

a) Viết phương trình đường thẳng (Δ_2) qua M và song song với (Δ_1).

b) Viết phương trình đường thẳng (Δ_3) qua M và vuông góc với (Δ_1).

c) Tìm khoảng cách giữa (Δ_1) và (Δ_2).

468. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ trực chuẩn Oxy cho tam giác ABC với các đỉnh $A(-6\ ;\ -3)$, $B(-4\ ;\ 3)$, $C(9\ ;\ 2)$.

a) Viết phương trình đường thẳng (d) chứa phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

b) Tìm điểm P trên đường thẳng (d) sao cho tứ giác ABPC là hình thang.

(Trích đề thi vào ĐHSP Hà Nội 2, 2000)

469. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hai điểm $A(1\ ;\ 1)$, $B(4\ ;\ -3)$. Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

(Trích đề thi khối B, 2004)

IV - ĐƯỜNG TRÒN

470. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đềcác vuông góc Oxy.
a) Viết phương trình đường tròn tâm $O(a\ ;\ b)$ bán kính R.
b) Từ đó suy ra phương trình đường tròn có tâm là gốc toạ độ, bán kính R.

471. Tìm tâm và bán kính đường tròn có phương trình :

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

với điều kiện $A^2 + B^2 - C > 0$.

472. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) : $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(5\ ;\ 1)$.

473. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ biết rằng tiếp tuyến qua điểm $M(1 + \sqrt{5}\ ;\ 0)$.

474. a) Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-1\ ;\ 2)$, bán kính $R = \sqrt{13}$.
b) Tìm toạ độ giao điểm của đường tròn (C) với đường thẳng $(\Delta) : x - 5y - 2 = 0$. Gọi các giao điểm là M, N. Tìm toạ độ điểm P sao cho tam giác MNP nội tiếp đường tròn.
c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) đi qua điểm M.

475. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đềcác vuông góc cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$. Gọi A và B là hai giao điểm của đường tròn (C) với trục hoành $(x_A > x_B)$.
a) Tìm toạ độ A, B, tâm I của đường tròn (C).

b) Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (C) và vuông góc với IA.

476. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn ($\mathscr{C}$) có phương trình :

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

a) Tìm tâm và bán kính của đường tròn ($\mathscr{C}$).

b) Xác định theo m vị trí tương đối của đường thẳng (Δ) :$y = 2x + m$ với đường tròn ($\mathscr{C}$).

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn vuông góc với đường $y = x$.

477. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy hãy lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba cạnh nằm trên ba đường thẳng sau :

$$y = \frac{x}{5} - \frac{2}{5}\ ,\quad y - x - 2 = 0\ ,\quad y + x - 8 = 0$$

478. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đềcác Oxy cho hai điểm A(8 ; 0), B(0 ; 6).

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

(Trích đề thi vào ĐH Đông Đô, 1998)

479. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đềcác vuông góc Oxy cho hai đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 - 10x = 0, (C_2) : x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$.

a) Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm (C_1), (C_2) và có tâm nằm trên đường thẳng (D) : $x + 6y - 6 = 0$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2).

V - ELIP

480. a) Cho đường thẳng (Δ), một điểm M và một số k ($0 < k < 1$). Thế nào là phép co điểm M về đường thẳng (Δ) theo hệ số k.

b) Thế nào là đường elip.

481. a) Viết phương trình chính tắc của elip trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đềcác vuông góc Oxy.

b) Nêu những đặc điểm hình dạng của elip.

482. a) Từ phương trình chính tắc của elip : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), xác định toạ độ tiêu điểm của elip.

b) Nêu điều kiện để điểm M nằm trên một elip.

c) Thế nào là bán kính qua tiêu của điểm M(x ; y) nằm trên elip ?

d) Thế nào là tiêu cự, tâm sai e của elip ?

483. Cho elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. Khi đó đường thẳng $(\Delta_1) : x = -\frac{a}{e}$, $(\Delta_2) : x = \frac{a}{e}$ được gọi là đường chuẩn của elip.

(Δ_1) gọi là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1.

(Δ_2) gọi là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2.

Cho elip : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

a) Xác định toạ độ tiêu điểm, toạ độ các đỉnh của elip.

b) Xác định tiêu cự, độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ của elip.

c) Xác định các đường chuẩn của elip.

484. Cho elip (E) : $16x^2 + 25y^2 = 400$. Tìm diện tích của tứ giác có hai đỉnh trùng với hai tiêu điểm của (E), hai đỉnh còn lại trùng với hai đỉnh của trục nhỏ.

485. Cho elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3} ; 0)$; $F_2(\sqrt{3} ; 0)$ và một đường chuẩn có phương trình $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

a) Viết phương trình chính tắc của (E).

b) M là một điểm thuộc (E). Tính giá trị biểu thức

$$P = F_1M^2 + F_2M^2 - 3OM^2 - F_1M.F_2M$$

c) Viết phương trình đường thẳng (d) song song với trục hoành và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho $OA \perp OB$.

486. Trên mặt phẳng với hệ toạ độ Đềcác vuông góc Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) :

a) Có tâm là gốc toạ độ và đi qua hai điểm $P(-3 ; 1)$ và $Q\left(4 ; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

b) Có tiêu điểm $F_1(-4 ; 0)$, có độ dài trục lớn là 12. Tìm những điểm nằm trên (E) có bán kính qua tiêu điểm này bằng 3 lần bán kính qua tiêu điểm kia.

487. Cho elip có phương trình :

$$(E) : \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} = 1$$

Tìm trên (E) những điểm nhìn F_1F_2 dưới một góc vuông.

488. Trong mặt phẳng toạ độ cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình :

$(d_1) : (a - b)x + y = 1$

$(d_2) : (a^2 - b^2)x + ay = b$

Cho biết $b^2 = 4a^2 + 1$.

a) Xác định giao điểm của (d_1) và (d_2).

b) Tìm tập hợp (E) các giao điểm của (d_1), (d_2) khi a, b thay đổi.

(Trích đề thi ĐH Dược Hà Nội, 2000)

489. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A(0 ; 4) và đường thẳng y = 8.

a) Tìm trên đường thẳng y = 0 điểm $B(x_B ; 0)$ và trên đường thẳng y = 8 điểm $C(x_C ; 8)$ sao cho AB = AC và tam giác ABC có diện tích bằng 24.

b) Chứng minh rằng các trọng tâm của các tam giác vừa tìm được nằm trên một đường thẳng.

490. Cho hai đường thẳng :

$$(\Delta_1) : x - 7y - 14 = 0$$

$$(\Delta_2) : x + y + 2 = 0$$

a) Tính góc tạo bởi (Δ_1) và (Δ_2).

b) Tính khoảng cách từ điểm M(2 ; 3) đến (Δ_1) và (Δ_2).

c) Viết phương trình đường phân giác của góc hợp bởi hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2).

d) Lập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua gốc toạ độ sao cho đường thẳng (Δ) tạo với (Δ_1), (Δ_2) một tam giác cân mà đỉnh là giao của (Δ_1) và (Δ_2).

491. Cho tam giác ABC, A(–1 ; 2), B(2 ; 4), C(4 ; 5).

a) Viết phương trình ba cạnh của tam giác.

b) Viết phương trình các đường cao của tam giác.

c) Tìm toạ độ trọng tâm G, trực tâm H, tâm đường tròn I ngoại tiếp tam giác.

492. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có B(2 ; 1), đường trung tuyến (AM) : $x + y - 2 = 0$, đường cao (CH) : $2x - y + 3 = 0$.

a) Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của tam giác.

b) Tìm diện tích của tam giác.

493. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đềcác trực chuẩn xOy, cho tam giác ABC có đỉnh A(–1 ; –3), đường cao BH nằm trên đường thẳng y = x, đường phân giác góc C nằm trên đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$. Viết phương trình cạnh BC.

(Trích đề thi vào ĐHKT Hà Nội, 1998)

494. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình :

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \text{ và điểm } M(2 ; 4)$$

a) Chứng tỏ rằng điểm M nằm trong đường tròn.

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M, cắt đường tròn tại hai điểm sao cho M là trung điểm của AB.

c) Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C}')$ đối xứng với $(\mathscr{C})$ qua đường thẳng AB.

495. Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau :

a) Có tâm là điểm $I(1 ; 2)$ và đi qua điểm $A(3 ; -5)$.

b) Có tâm nằm trên đường thẳng $3x - 2y - 3 = 0$ và đi qua hai điểm $A(1 ; 3)$, $B(3 ; 1)$.

c) Có tâm nằm trên đường thẳng $2x + y - 4 = 0$, có bán kính bằng 5 và đi qua điểm $A(4 ; 6)$.

496. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 = r^2$ và một điểm $A(x_1 ; y_1)$ nằm ngoài đường tròn.

Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn $(\mathscr{C})$, trong đó B, C là hai tiếp điểm.

a) Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm B, C.

b) Giả sử A chạy trên đường thẳng (a) cố định không có điểm chung với đường tròn $(\mathscr{C})$. Chứng minh rằng khi đó các đường thẳng đi qua B, C luôn đi qua một điểm cố định.

497. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$ có phương trình :

$$x^2 + y^2 + 2(m - 1)x - 2(m - 2)y + m^2 - 8m + 13 = 0$$

a) Tìm tất cả các giá trị của m để $(\mathscr{C}_m)$ là đường tròn. Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn khi m thay đổi.

b) Cho $m = 4$. Viết phương trình các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A(1 ; 5)$ đến $(\mathscr{C}_4)$.

(Trích đề thi vào ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, 2001)

498. Cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

a) Tìm toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh của (E).

b) Tìm độ dài trục lớn, trục nhỏ, tiêu cự.

c) Tìm tâm sai e của (E).

499. Lập phương trình chính tắc của (E) biết hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5} ; 0)$, $F_2(\sqrt{5} ; 0)$ và đi qua điểm $B(0 ; 2)$.

500. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc Oxy cho elip :

$$(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

và hai đường thẳng $(D) : ax - by = 0$; $(D') : bx + ay = 0$ với $a^2 + b^2 > 0$.
Gọi M, N là giao của (D) với (E) ; P, Q là giao của (D') với (E).

1) Tính diện tích tứ giác MPNQ theo a, b.

2) Tìm điều kiện để diện tích tứ giác MPNQ nhỏ nhất.

(Trích đề thi ĐH Y – Dược TP. Hồ Chí Minh, 2001).

Phần II

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1. a) Mệnh đề sai vì 77 còn có ước là 11

b) Mệnh đề sai vì nếu cặp cạnh đối còn lại không bằng nhau thì tứ giác không phải là hình bình hành.

c) Mệnh đề sai vì nếu $a < 0$ thì $-a > 0$

2. a) Là mệnh đề. Mệnh đề phủ định là : "Hiệu độ dài hai cạnh của một tam giác lớn hơn hoặc bằng độ dài cạnh thứ ba".

b) Là một mệnh đề. Mệnh đề phủ định là : "Phương trình $x^2 - x - 15 = 0$ có nghiệm".

3. a) A : "$\forall a, b \in R, a + b = b + a$"

A đúng vì phép cộng các số thực có luật giao hoán

$\overline{A}$: sai

b) B : "$\exists x \in R, x^2 = -3$"

B sai. $\overline{B}$: "$\forall x \in R, x^2 \neq -3$" đúng.

4. a) $\overline{A}$: "Bình phương của mọi số thực là số âm". $\overline{A}$ là mệnh đề sai.

b) $\overline{B}$: "$\forall x \in R, x^2 + 1 \neq 0$" là mệnh đề đúng.

c) $\overline{C}$: "$\exists k \in Z, k(k + 1)(k + 2)$ không chia hết cho 3" là mệnh đề sai.

5. Là mệnh đề kéo theo dạng $A \Rightarrow B$ với :

A : "Hai tam giác đã cho là đồng dạng".

B : "Hai tam giác đã cho có diện tích bằng nhau".

Mệnh đề đã cho là sai vì B sai : Hai tam giác đồng dạng có thể có diện tích khác nhau.

6. A : "ΔABC là tam giác đều".

B : "Tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là giao điểm 3 đường cao".

Vì $A \Rightarrow B$ là đúng nên nó là một định lý.

7. A : "Số nguyên tận cùng bằng 9"

B : "Số nguyên đó chia hết cho 3"

Mệnh đề $A \Rightarrow B$ này sai (ví dụ : 19 không chia hết cho 3), do đó nó không phải là một định lý.

8. a) $A \Rightarrow B$ đúng.

Định lý toán học : "Nếu tứ giác là hình chữ nhật thì tứ giác đó có 2 đường chéo bằng nhau" hoặc gọn hơn : "Hình chữ nhật có 2 đường chéo bằng nhau".

b) "Hình chữ nhật là điều kiện đủ để tứ giác có hai đường chéo bằng nhau".

"Hai đường chéo bằng nhau là điều kiện cần để tứ giác là hình chữ nhật".

c) Không được vì mệnh đề $B \Rightarrow A$ sai.

9. a) $P \Rightarrow Q$ đúng. Có định lý : "Hình bình hành có 2 cạnh liên tiếp bằng nhau là hình thoi".

$Q \Rightarrow P$ đúng. Có định lý : "Hình thoi là hình bình hành có 2 cạnh liên tiếp bằng nhau".

Vậy P $\Leftrightarrow$ Q.

b) "Hình bình hành có 2 cạnh liên tiếp bằng nhau là điều kiện đủ để tứ giác là hình thoi" hoặc ngược lại.

"Hình bình hành có hai cạnh liên tiếp bằng nhau là điều kiện cần để tứ giác là hình thoi" hoặc ngược lại.

"Hình bình hành có hai cạnh liên tiếp bằng nhau là điều kiện cần và đủ[1] để tứ giác là hình thoi" hoặc ngược lại.

10. *) C $\Rightarrow$ D sai (Vì 15 không tận cùng bằng 0, chia hết cho 5).

D $\Rightarrow$ C đúng. Định lý : "Số tận cùng bằng 0 chia hết cho 5".

**) Tận cùng bằng 0 là điều kiện đủ để số nguyên chia hết cho 5".

"Chia hết cho 5 là điều kiện cần để số nguyên tận cùng bằng 0".

11. a) Xem A : "Tứ giác là hình bình hành".

B : "Tứ giác có các cặp cạnh đối bằng nhau".

Có A $\Rightarrow$ B đúng và B $\Rightarrow$ A đúng nên A $\Leftrightarrow$ B

Suy ra :

a) là mệnh đề đúng.

b) Đúng.

c) Đúng vì mệnh đề "Hình bình hành có hai cạnh đối bằng nhau" đúng.

d) Sai vì mệnh đề "Hình tứ giác có hai cạnh đối bằng nhau là hình bình hành" là sai.

12. 1. Điều kiện cần và đủ để một tứ giác lồi là hình bình hành là nó có các cặp cạnh đối bằng nhau từng đôi.

2. Điều kiện cần và đủ để tứ giác lồi là hình bình hành là nó có các cặp cạnh đối song song từng đôi.

3. Điều kiện cần và đủ để tứ giác lồi là hình bình hành là nó có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

4. Điều kiện cần và đủ để tứ giác lồi là hình bình hành là nó có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

13. Điều kiện cần và đủ để một tứ giác lồi là hình chữ nhật.

1. Có 3 góc vuông.
2. Có 2 đường chéo bằng nhau, cắt nhau ở trung điểm của mỗi đường.
3. Có 1 góc vuông và các cặp cạnh đối bằng nhau.
4. Có 1 góc vuông và các cặp góc đối bằng nhau.

14. Điều kiện cần và đủ để một tứ giác lồi là hình thoi :

1. Có 4 cạnh bằng nhau.
2. Có 2 đường chéo vuông góc, cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
3. Có các cặp cạnh đối bằng nhau và hai cạnh liên tiếp nào đó bằng nhau.
4. Có các cặp góc đối bằng nhau và hai cạnh liên tiếp nào đó bằng nhau.

15. Điều kiện cần và đủ để một hình bình hành là hình chữ nhật.

1. Có 1 góc vuông.
2. Có 2 đường chéo bằng nhau.

---

[1] Chính vì vậy mà người ta có thể lấy đây làm định nghĩa của hình thoi.

16. Điều kiện cần và đủ để một hình bình hành là hình thoi :

1. Có 2 cạnh liên tiếp nào đó bằng nhau.
2. Có 2 đường chéo vuông góc.

17. Điều kiện cần và đủ để một hình bình hành là hình vuông :

1. Có 2 cạnh liên tiếp nào đó bằng nhau và có 1 góc vuông.
2. Có 2 cạnh liên tiếp nào đó bằng nhau và có 2 đường chéo bằng nhau.

18. Nếu $k \in Z$, k có thể được viết dưới dạng.

* $k = 2n$ với $n \in Z$ hoặc $k = 2n + 1$ với $n \in Z$.

Nếu $k = 2n$ thì $k^2 + k + 1 = 4n^2 + 2n + 1$ không chia hết cho 2 (là số lẻ).

Nếu $k = 2n + 1$ thì $k^2 + k + 1 = (2n + 1)^2 + (2n + 1) + 1$

$= (4n^2 + 6n + 2) + 1$ cũng là số lẻ.

19. Phủ định kết luận của mệnh đề, có các trường hợp sau :

* $a > 1$, $b > 1$. Khi đó $a + b > 2$, mâu thuẫn với giả thiết.

* $a > 1$, $b = 1$ (và ngược lại). Khi đó $a + b > 2$, mâu thuẫn với giả thiết.

* $a = 1$, $b = 1$. Khi đó $a + b = 2$, mâu thuẫn với giả thiết.

Các mâu thuẫn trên chứng tỏ mệnh đề đúng.

20. Mệnh đề đảo : "Nếu a hoặc b nhỏ hơn 1 (với $a, b \in R$) thì $a + b < 2$" là sai vì chẳng hạn, nếu $a = 0{,}5$ thì có thể chọn $b = 2$, khi đó $a + b = 2{,}5 > 2$.

21. a) Đúng b) Sai c) Sai d) Sai

e) Đúng f) Sai g) Đúng k) Sai i) Sai

22. a) Sai b) Đúng c) Sai d) Sai

23. Lập danh sách trong tổ gồm : Họ và tên, nếu trùng cả họ và tên thì ghi năm sinh ....

24. a) $A = \{-1 ; 1\}$ b) $B = \{1\}$

c) $C = \{1\}$ d) $D = \left\{-1 ; \frac{1}{3}\right\}$

e) $E = \{1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19\}$

f) $F = \{-6 ; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

25. a) $B \subset A$; $C \subset A$; $D \subset A$; $E \subset A$; $F \subset A$

$C \subset B$; $D \subset B$; $E \subset B$;

$E \subset C$; $E \subset D$

$D \subset F$; $E \subset F$

b) $C \cap D = E$

$B \cap F = D$

$B \setminus (C \cup D \cup E)$: tập hợp các hình bình hành vừa không có góc vuông vừa không có các cạnh bằng nhau.

26. a) $A \cup B = B = \{0\}$; $A \cap B = A = \varnothing$; $A \setminus B = \varnothing$; $B \setminus A = 0$

b) $C \cup D = D = \{x \in N \mid x \vdots 3\}$

c) $C \cap D = C = \{x \in N \mid x \vdots 9\}$

$C \setminus D = \varnothing$; $D \setminus C = \{x \in N \mid x \vdots 3 \text{ và } x \vdots 9\}$

d) $E \cup F = E = F$; $E \cap F = E = F$; $E \setminus F = F \setminus E = \varnothing$

27. a) $\{a_1\}$; $\{a_2\}$; $\{a_3\}$

$\{a_1 ; a_2\}$; $\{a_1 ; a_3\}$; $\{a_2 ; a_3\}$

$\{a_1 ; a_2 ; a_3\}$; $\varnothing$

Có 8 tập hợp con $(2^3 = 8)$.

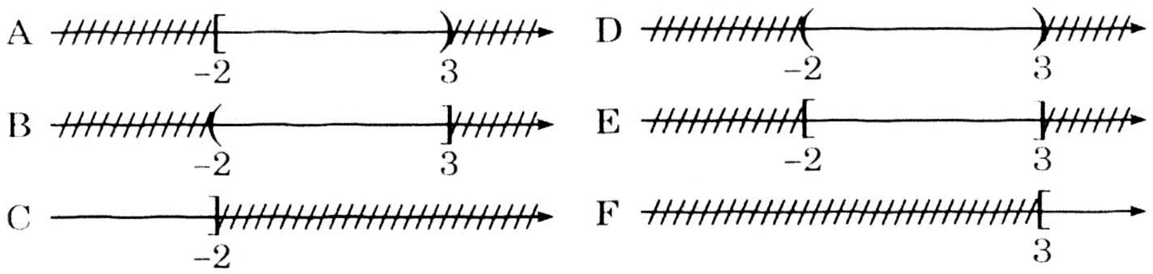
b) $\varnothing$, $\{0\}$, có hai tập hợp con $(2^1 = 2)$

c) $\varnothing$, có 1 tập con duy nhất.

d) Có $D = \{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$

Các bạn tự giải – (Có tất cả $2^5 = 32$ tập con)

28. a)



Hình 6

b) $A \cup B = [-2 ;-3]$; $A \cap B = (-2 ; +3)$; $A \setminus B = \{-2\}$;

$A \cup C = (-\infty ; +3)$; $A \cap C = \{-2\}$; $A \setminus C = (-2 ;3)$

$C \setminus A = (-\infty ; -2)$; $A \cup D = [-2 ; 3)$; $A \cap D = (-2 ; -3)$;

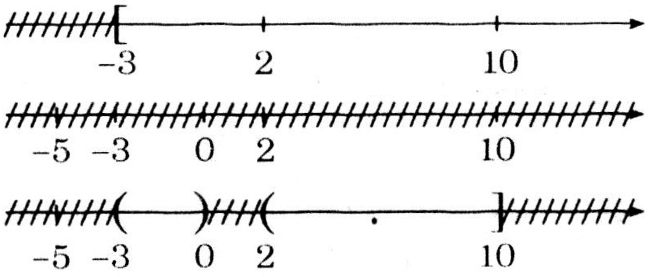
$A \setminus D = \{-2\}$; $D \setminus A = \varnothing$; $A \cup E = [-2 ; +3]$

.... Bạn đọc tự giải tiếp.

29. $A \cup B = (-3 ; +\infty)$

$A \cap B \cap C = \varnothing$

$(B \cup C) \cap A = (-3 ; 0) \cup (2 ; 10]$



Hình 7

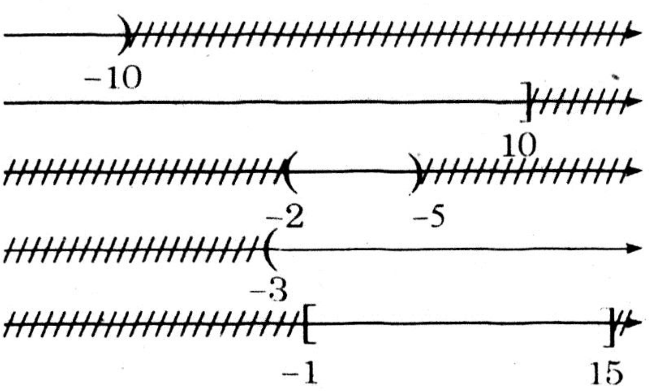
30. a) $(-\infty ; -10) = x < -10$

b) $(-\infty ; 10] = x \leq 10$

c) $(-2 ; -5) = -2 < x < -5$

d) $(-3 ; +\infty) = x > -3$

e) $[-1 ; 15] = -1 \leq x \leq 15$



Hình 8

31. a) $\left(-\infty ; \frac{2}{3}\right)$ b) $\left[\frac{2}{3} ; +\infty\right)$

c) $(2 ; 10)$ d) $[-1 ; 4]$ e) $(1 ; 4]$

32. a) $(-2 ; 3)$

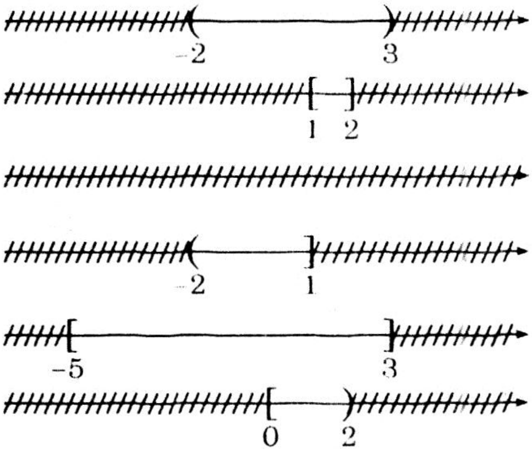
b) $[1 ; 2]$

c) $\varnothing$

d) $(-2 ; 1]$ hoặc $-2 < x \leq 1$

e) $[-5 ; 3]$ hoặc $-5 \leq x \leq 3$

f) $[0 ; 2)$ hoặc $0 \leq x < 2$



Hình 9

33. a) $(-2 ; 4]$ b) $(-\infty ; 1] \cup (2 ; +\infty)$

c) $(-\infty ; 5)$ • d) $(-10 ; 0) \cup [1 ; +\infty)$

34. a) $-2 < x < 1$ b) $2 < x < 4$

35. a) $(-5 ; -2]$ b) $\varnothing$

36. a) $(0 ; +\infty)$ b) $(-5 ; 1)$

37. a) $[-1 ; +\infty) \cup [-3 ; 4) \setminus (0 ; +\infty) = [-3 ; 0]$

b) $a \leq 3$

c) Có 15 tập con. Đó là :

{0 ; 1 ; 2} ; {0 ; 1 ; 3} ; {0 ; 1 ; 4} ; {0 ; 1 ; 5} ; {0 ; 1 ; 6,
{0 ; 2 ; 3} ; {0 ; 2 ; 4} ; {0 ; 2 ; 5} ; {0 ; 2 ; 6}
{0 ; 3 ; 4} ; {0 ; 3 ; 5} ; {0 ; 3 ; 6}
{0 ; 4 ; 5} ; {0 ; 4 ; 6}
{0 ; 5 ; 6}

38. a) $A = R \setminus \left[\frac{13}{2} ; +\infty\right) = \left(-\infty ; \frac{13}{2}\right)$.

Hoặc $A = \{x \in R \mid 2x - 3 < 10\}$

b) $B = \{x \in R \mid |x| < 3\}$

39. a) Giả sử F, G là các tập hợp lồi và $F \cap G \neq \varnothing$

Xét các điểm M, N ($M \neq N$) trong $F \cap G$. Ta có :

$M \in F \cap G \Rightarrow M \in F$. Vì F là tập hợp lồi nên $MN \subset F$ (1)

$N \in F \cap F \Rightarrow N \in F$

Tương tự $MN \subset G$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN \subset F \cap G$: $F \cap G$ là tập hợp lồi.

b) Chưa thể khẳng định.

40. Ta có sơ đồ Ven sau đây với :

T : Tập hợp học sinh thích Toán

A : Tập hợp học sinh thích Anh

V : Tập hợp học sinh thích Văn

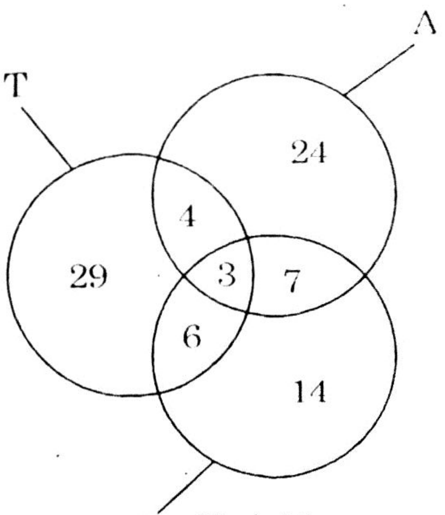
Qua sơ đồ, ta thấy ngay :

a) Tổng số học sinh chỉ thích một môn :

29 + 24 + 14 = 67 em

b) Số học sinh không thích môn nào :

100 − [67 + (4 + 3 + 6 + 7)] = 13 em.



Hình 10

41. 1. Một hàm số f xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subset R$, $\mathcal{D} \neq \varnothing$) là một quy tắc : Ứng với mỗi số $x \in \mathcal{D}$ luôn xác định một số thực y duy nhất, gọi là *giá trị* của hàm số f tại x, kí hiệu là y = f(x).

Người ta thường viết như sau : $f : \mathcal{D} \to R$

$$x \mapsto y = f(x)$$

$\mathcal{D}$ gọi là *tập xác định*, x gọi là đối số (hay biến số) của hàm số f.

Ví dụ : Một người đi bộ trung bình mỗi giờ đi được 4 km

Như vậy 1 giờ người đó đi được 4 km.

2 giờ người đó đi được 8 km.

……………………

Nếu gọi S là quảng đường đi được trong thời gian t, thì quãng đường đi được là hàm số của thời gian t, ta viết S = 4t.

2. Trong câu 1) hàm số y = f(x) có $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}$, $\mathcal{D} \neq \varnothing$ thì $\mathcal{D}$ là tập xác định của hàm số. Nếu hàm số cho dưới dạng biểu thức thì tập xác định của hàm số y = f(x) là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa.

Ví dụ :

- Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x-1}$ thì tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.
- Cho hàm số $y = \sqrt{x-3}$ thì tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [3 ; +\infty)$.

42. Trong các tương ứng đã cho thì tương ứng g, tương ứng p xác định hàm số.

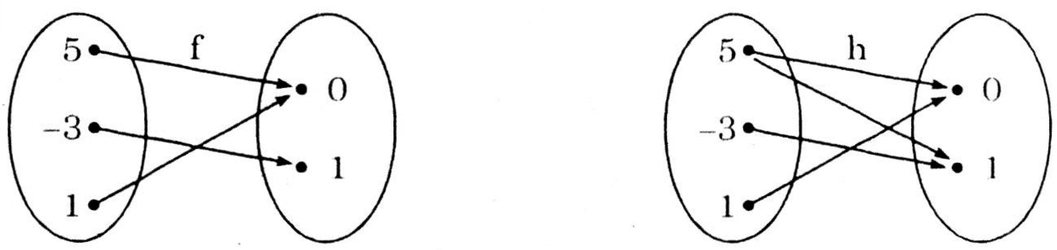
Tương ứng g xác định hàm số từ M đến N, vì ứng với mỗi số thuộc M có một số duy nhất thuộc N.

Tương ứng p xác định hàm số từ A đến B.

Tương ứng f không xác định một hàm số từ X đến Y vì ứng với mỗi giá trị $5 \in X$ có hai giá trị là 0 và 1 thuộc Y.

Tương ứng h không xác định một hàm số từ A đến B vì giá trị $4 \in A$ không có giá trị tương ứng thuộc B.

43. 1. a)



Hình 11

Tương ứng f xác định một hàm số từ A đến B, vì ứng với mỗi số thuộc A có một số duy nhất thuộc B. Tương ứng h không xác định một hàm số vì ứng với $5 \in A$ có hai giá trị 0 ; 1 thuộc B.

2. Hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ 3 - 2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Ta có $f(1) = 0$; $f(0) = 1$; $f(-2) = 7$; $f(-3) = 9$.

44. a) $y = \dfrac{8}{x - 10}$, muốn y có nghĩa thì $x - 10 \neq 0 \Rightarrow x \neq 10$, nên tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbf{R} \setminus \{10\}$.

b) $y = \sqrt{5 - x}$

$\mathcal{D} = [5 ; +\infty)$

c) $y = \dfrac{2x - 3}{x^2 - x + 1}$, muốn y có nghĩa thì $x^2 - x + 1 \neq 0$, mà $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$, nghĩa là $x^2 - x + 1 > 0, \forall x$. Nên tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbf{R}$.

d) $y = \dfrac{1}{(x - 2)\sqrt{x - 1}}$, muốn y có nghĩa thì $x > 1$ và $x \neq 2$. Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (1 ; 2) \cup (2 ; +\infty)$.

45. a) Hàm số $y = x^2$ xác định với mọi giá trị của x (nghĩa là $\mathcal{D} = \mathbf{R}$) và tập giá trị của hàm số là **R**.

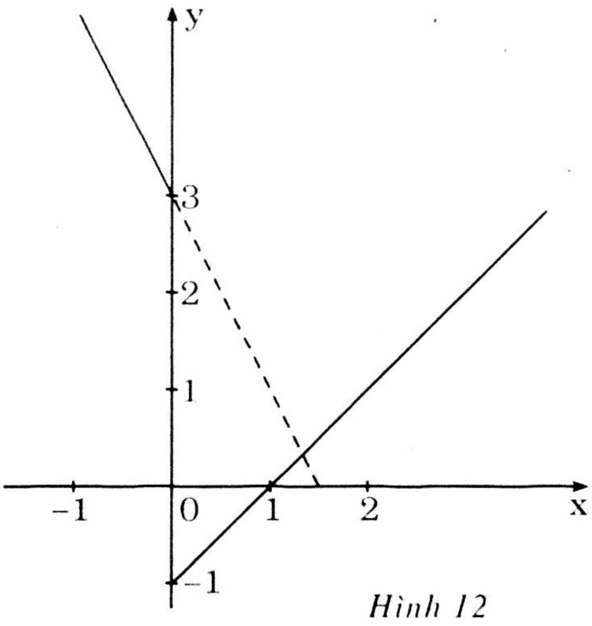
b) $y = 2x - 6$, $y = 0$ thì $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$y = x^2 - 25$, $y = 0$ thì $x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 5$.

46. a) Hàm số $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ xác định với mọi $x \neq 0$, nên tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

b) $f(-4) = (-4) - \dfrac{1}{(-4)} = -\dfrac{15}{4}$; $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = -\dfrac{15}{4}$

$f(5) = \frac{24}{5}$; $f(-0,25) = 3,75$.



Hình 12

47. 1) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathcal{D}$ là tập hợp các điểm $(x ; f(x))$ với $x \in \mathcal{D}$ đối với một hệ toạ độ đã cho.

Ví dụ : Đồ thị hàm số

$$y = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ 3 - 2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \quad \text{(bài tập 5)}$$

là nét đậm của hình 12.

2) a) Hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$:

- $y = f(x)$ đồng biến (hay tăng) trên $(a ; b)$, nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a ; b)$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- $y = f(x)$ nghịch biến (hay giảm) trên $(a ; b)$, nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a ; b)$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Người ta có thể xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số bằng đồ thị :

- Nếu một hàm số đồng biến trên khoảng $(a ; b)$ thì đồ thị của nó đi lên trong khoảng đó.
- Nếu một hàm số nghịch biến trên khoảng $(a ; b)$ thì đồ thị của nó đi xuống trong khoảng đó.

Từ đó và căn cứ vào đồ thị hàm số (h. 2) ta có :

Hàm số đồng biến trong các khoảng sau : $(-2 ; 1) ; (3 ; 4)$

Hàm số nghịch biến trong các khoảng sau : $(-3 ; -2) ; (1 ; 3)$

b) $f(-3) = f(-1) = f(3) = 0$; $f(0) = 2$; $f(4) = 1$.

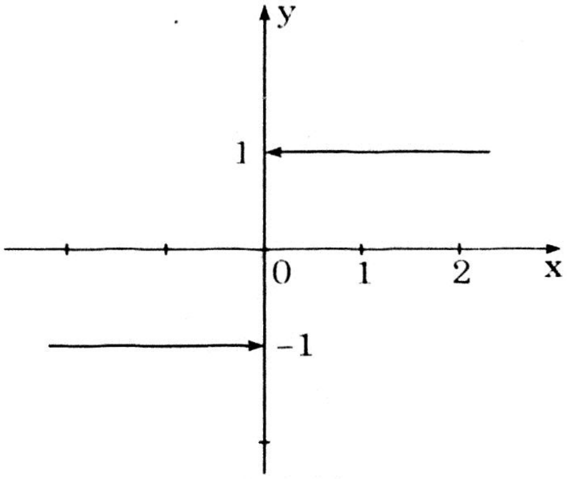
c) $\underset{(-3;4)}{\text{GTLN}}\, f(x) = f(1) = 3$;

$\text{GTNN}\, f(x) = f(-2) = -1$

3. Đồ thị hàm số

$$\text{sgn}x = \begin{cases} -1 \text{ nếu } x < 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \quad \text{(hàm dấu)} \\ 1 \text{ nếu } x > 0 \end{cases}$$

(điểm có tung độ là 1 ; −1 trên trục tung không phải là điểm của đồ thị)



Hình 13

48. 1) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathcal{D}$

- Hàm số $f(x)$ gọi là hàm số chẵn, nếu ứng với $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(x) = f(-x)$
- Hàm số $f(x)$ gọi là hàm lẻ, nếu ứng với $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(x) = -f(-x)$

Ví dụ : Hàm số $y = x^2$ là hàm số chẵn, hàm số $y = x^3$ là hàm số lẻ.

Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

2) a) $y = x^3 + x$, tập xác định là $\mathbf{R}$ nên $x \in \mathbf{R}$ thì $-x \in \mathbf{R}$ và $f(x) = x^3 + x$,

$f(-x) = (-x)^3 - x = -x^3 - x = -f(x)$ nên $y = x^3 + x$ là hàm số lẻ.

b) $y = x^2 + x$, tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbf{R}$ nên $x \in \mathbf{R}$ thì $-x \in \mathbf{R}$ và $f(x) = x^2 + x$.

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 - x \neq f(x)$ nên hàm $y = x^2 + x$ là hàm không chẵn cũng không lẻ.

c) $y = \sqrt{1 - x^2}$, hàm số xác định khi và chỉ khi $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$, vậy tập xác định $\mathcal{D} = [-1 ; 1]$, nên $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = f(x)$ nên hàm số đã cho là hàm chẵn.

d) $y = \sqrt{4 + x} + \sqrt{4 - x}$, muốn y có nghĩa $\Leftrightarrow 4 + x \geq 0$ và $4 - x \geq 0$ $x \geq -4, x \leq 4$ nên tập xác định $\mathcal{D} = [-4 ; 4]$.

Vậy $x \in [-4 ; 4]$ thì $-x \in [-4 ; 4]$ và $f(x) = \sqrt{4 + x} + \sqrt{4 - x}$

$f(-x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{4 - (-x)} = \sqrt{4 + x} + \sqrt{4 - x} = f(x)$ nên hàm số đã cho là hàm số chẵn.

49. a)

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$y = x^2 + 3x - 4$	$+\infty$	↘	$\frac{-25}{4}$	↗	$+\infty$

b)

x	$-\infty$			1			$+\infty$
$y = \frac{6}{x - 1}$	0	↘	$-\infty$	‖	$+\infty$	↘	0

c)

x	$-\infty$		$+\infty$
$y = x^3 - 1$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y = \sqrt{x^2 + 1}$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

50. Ta đã biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các điểm $(x ; f(x))$. Như vậy đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các điểm mà toạ độ của nó thoả mãn đẳng thức $y = f(x)$ bằng số. Trong bài toán đã cho không chỉ ra tập hợp các điểm đó thoả mãn tính chất gì ? Như vậy không thể kết luận tập hợp các điểm đó là đồ thị hàm số $y = f(x)$.

51. Hàm số $y = 3x$; $y = -2x + 3$ là hàm số bậc nhất

52. a) Khoảng xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbf{R}$.

b) Hàm số $y = f(x)$ là hàm số nghịch biến.

c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng cắt hai trục toạ độ, nên $y = f(x)$ là hàm số bậc nhất $y = ax + b$ đi qua hai điểm $(0 ; 3)$ và $(3 ; 0)$ nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3 = a.0 + b \\ 0 = a.3 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Vậy hàm số là $y = f(x) = -x + 3$, với $\mathscr{D} = \mathbf{R}$.

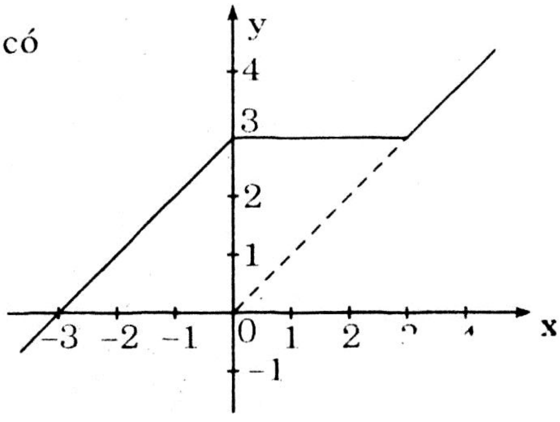
53. a) Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $\mathscr{D} = [-3 ; 1]$

b) Tập giá trị của hàm số $y = f(x)$ là $[-2 ; 2]$

c) $f(1) = 2$, $f(0) = 1$; $f(-1) = 0$

d) Làm tương tự như câu c) bài 2. Ta có hàm số :

$y = f(x) = x + 1$ với $\mathscr{D} = [-3 ; 1]$



Hình 14

54. 1) Hình 14

2) a) $y = 2|x| + 1 = \begin{cases} 2x + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -2x + 1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

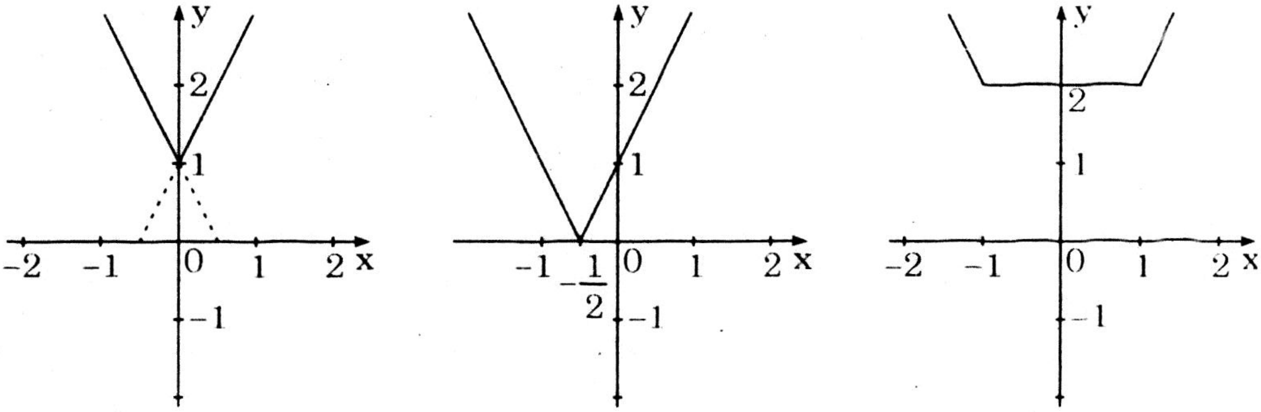
Đồ thị là h. 15a

b) $y = |2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{nếu } x \ge -\dfrac{1}{2} \\ -2x-1 & \text{nếu } x < -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Đồ thị là h.15b

c) $y = |x+1| + |x-1| = \begin{cases} -2x & \text{nếu } x < -1 \\ 2 & \text{nếu } -1 \le x < 1 \\ 2x & \text{nếu } \ge 1 \end{cases}$

Đồ thị là h.15c



a) b) c)

Hình 15

55. Cạnh AB có phương trình là, cạnh này đi qua $A(-1\,;1)$, $B(2\,;3)$ nên ta có

hệ phương trình sau : $\begin{cases} 1 = -a + b \\ 3 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

Vậy phương trình của cạnh $(AB): y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$

Tương tự ta có phương trình cạnh $(AC): y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$

$$(BC): y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$$

56. a) Toạ độ giao điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -x + 5 \end{cases} \Rightarrow 2x + 2 = -x + 5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 4$$

Vậy toạ độ của $M = (1\,;4)$

b) Đường thẳng $x = 5$ là đường thẳng song song với trục tung cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 5. Vậy đường thẳng vuông góc với đường thẳng $x = 5$ và đi qua $M(1\,;4)$ là $y = 4$ (HS tự vẽ hình).

c) Đường thẳng song song với đường thẳng $y = -3x + 2$ là $y = -3x + b$, nó đi qua $M(1\,;4)$ nên ta có $4 = -3 \times 1 + b \Rightarrow b = 7$. Phương trình của đường thẳng phải tìm là $y = -3x + 7$.

57. Dễ dàng tìm được giao điểm của đường thẳng $y = 2x$ và $y = -x - 3$ là $M(-1\,; -2)$. Muốn ba đường thẳng đồng quy thì đường thẳng $y = mx + 5$ phải đi qua M, nên ta có : $-2 = m x(-1) + 5 \Rightarrow m = 7$.

58. a) Ta biết $t_F = at_c + b$, nước đóng băng ở 0^0C, ở 32^0F nên ta có :

$$32 = a.0 + b \Rightarrow b = 32^0.$$

Nước sôi ở 100^0C, ở 212^0F, nên ta có

$$212^0 = a.100^0 + 32^0 \Rightarrow a = \frac{212 - 32}{100} = 1,8$$

Tóm lại $a = 1,8$ và $b = 32^0F$, $t_F = 1,8\,t_c + 32^0$

b) Khi $t_F = 115^0$, $t_c = \dfrac{t_F - 32^0}{1,8} \Rightarrow t_c = \dfrac{115^0 - 32^0}{1,8} \approx 46^0$

Vậy nhiệt độ 115^0F ứng với 46^0C

59. a) Ta có công thức $v = v_0 + 3200t$ hay $v = 10000km/sec + 5200t^{(*)}$

Sau 1 sec $v = 10000 + 3200 = 13200km/sec$

Sau 10 sec $v = 10000 + 3200 \times 10 = 42000km/sec$

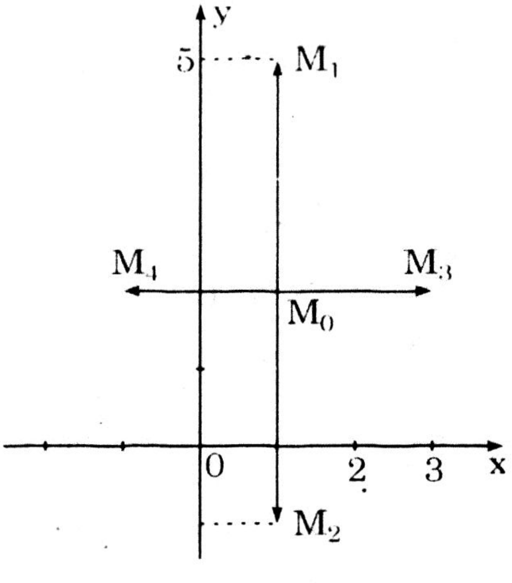
b) Từ (*) ta có $t = \dfrac{v - 10000}{3200}$ nên $t = \dfrac{120000 - 10000}{3200} = 34,375$ (sec)

60. 1. Hàm số bậc hai là hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$ trong đó a, b, c là hằng số và $a \neq 0$. Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbf{R}$.

Ví dụ $y = x^2$, $y = -x^2 + 2x + 1$...

2. a) $M_0(1\,;2)$, tịnh tiến điểm M_0 theo phương của trục tung lên trên 3 đơn vị ta được điểm M_1, xuống dưới 3 đơn vị ta được điểm M_2.

b) Tịnh tiến điểm $M_0(1\,;2)$ theo phương của trục hoành sang phải 2 đơn vị ta được điểm M_3, sang trái 2 đơn vị ta được điểm M_4 (h. 16).



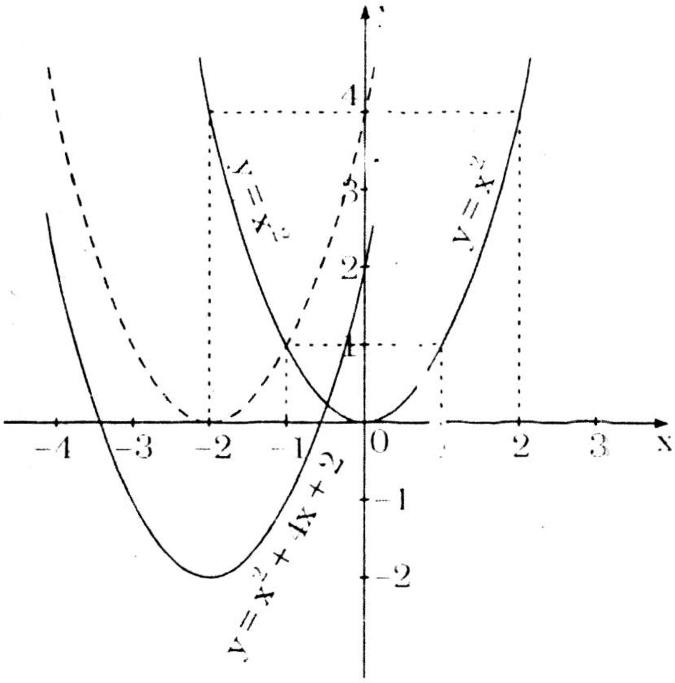
Hình 16

61. 1. Trong mặt phẳng toạ độ cho G là đồ thị của hàm số $y = f(x)$, m, n là hai số tuỳ ý. Khi đó

a) Đồ thị của hàm số $y = f(x) + m$ là đồ thị G tịnh tiến theo phương của trục tung $|m|$ đơn vị lên trên nếu $m > 0$, xuống dưới nếu $m < 0$

b) Đồ thị của hàm số $y = f(x - n)$ là đồ thị G tịnh tiến dọc theo trục hoành $|n|$ đơn vị, sang phải nếu $n > 0$, sang trái nếu $n < 0$.

2. a) Đồ thị C của hàm số $y = x^2$ là một parabol (h. 17).



Hình 17

b) $y = x^2 + 4x + 2 = (x+2)^2 - 2 = [x - (-2)]^2 - 2$

Đồ thị hàm số $y = x^2 + 4x + 2$ là parabol $y = x^2$ tịnh tiến theo phương của trục hoành 2 đơn vị về bên trái sau đó lại tịnh tiến theo phương của trục tung 2 đơn vị xuống phía dưới.

62. $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Nếu đặt $\Delta = b^2 - 4ac$

$$n = -\frac{b}{2a}, \ m = \frac{-\Delta}{4a}$$

thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có dạng $y = a(x-n)^2 + m$

Gọi P_0 là parabol $y = ax^2$ thì đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ là parabol P_0 tịnh tiến hai lần như sau :

Lần 1 : Tịnh tiến theo phương của trục hoành $\left|-\frac{b}{2a}\right|$ đơn vị sang phải nếu $-\frac{b}{2a} > 0$, sang trái nếu $-\frac{b}{2a} < 0$. Ta được P_1

Lần 2 : Sau đó tịnh tiến P_1 theo phương của trục tung $\left|\frac{-\Delta}{4a}\right|$ đơn vị lên trên nếu $-\frac{\Delta}{4a} > 0$, xuống dưới nếu $-\frac{\Delta}{4a} < 0$. Ta được P

Kết luận : Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ là một parabol có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên nếu $a > 0$, hướng bề lõm xuống dưới nếu $a < 0$.

63. a) $y = -x^2 + 2x + 3$

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbf{R}$

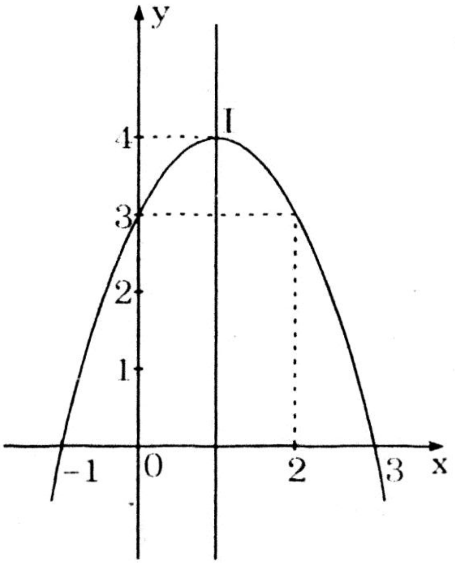
- Toạ độ đỉnh I $\begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4+12}{-4} = 4 \end{cases}$

- Bảng biến thiên :

a = −1 < 0 nên có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	↘	4	↗	$-\infty$

- Đồ thị là parabol có đỉnh $I(1 ; 4)$ nhận đường thẳng $x = 1$ làm trục đối xứng, bề lõm hướng xuống dưới (vì $a = -1 < 0$) (h. 18)



Hình 18

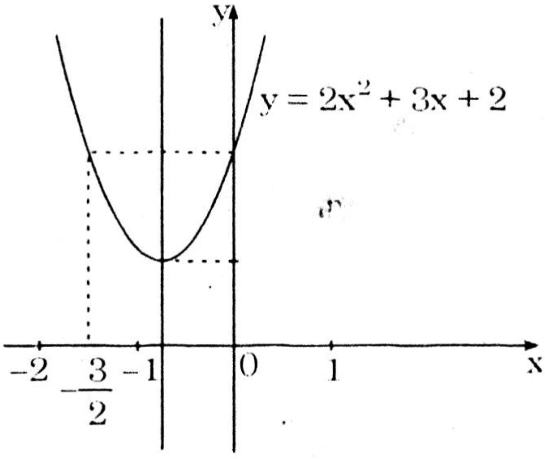
b) $y = 2x^2 + 3x + 2$

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbf{R}$

- Toạ độ đỉnh I $\begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{4} \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9-16}{8} \\ \quad = \frac{7}{8} \end{cases}$

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$\frac{7}{8}$	↗	$+\infty$



Hình 19

c) HS tự làm.

64. a) $y = x^2 + ax + b$, $I\begin{cases} x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{a}{2} = 0 & \Rightarrow a = 0 \\ y_0 = b = 1 \end{cases}$

b) $y = ax^2 + x + b$, $I\begin{cases} x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-1}{2a} = 1 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2} \\ y_0 = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{1^2 - 4\left(-\dfrac{1}{2}\right).b}{-\dfrac{1}{2}.4} = -1 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

c) $y = ax^2 + bx - 2$, $I(1\,;2)$, $a \neq 0$

Ta có : $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \Rightarrow 2a = -b \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 2 \Rightarrow -\dfrac{b^2 + 8a}{4a} = 2 \Leftrightarrow -b^2 - 16a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 8 \end{cases}$

65. 1) $y = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$

Vậy $I\begin{cases} x_0 = \dfrac{a + b}{2} \\ y_0 = -\dfrac{(a - b)^2}{4a} \end{cases}$

2) Parabol $y = ax^2 + bx + 1$

a) Đi qua $A(1\,;3) \Rightarrow$ Đi qua $B(-2\,;5) \Rightarrow$ $\begin{cases} 3 = a + b + 1 \\ 5 = a - 2b + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{8}{3} \\ b = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

b) Đi qua điểm $M(3\,;-2) \Rightarrow -2 = 9a + 3b$ và có trục đối xứng

$$x = -2 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a$$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 9a + 3b = -2 \\ b = 4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{21} \\ b = -\dfrac{8}{21} \end{cases}$

66. $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ với tập xác định $\mathcal{D} = [-2\,;2]$

$I(0\,;4)$ và đi qua điểm $A(-2\,;0)$ và $B(2\,;0)$.

Do đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 4 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad \begin{cases} b = 0 \\ b^2 - 4ac = -16a \\ 4a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 0 \\ c = 16 \end{cases}$$

Vậy hàm số có đồ thị là cái cổng parabol (h. 5) là $y = -4x^2 + 16 = 0$ với tập xác định $\mathcal{D} = [-2 ; 2]$

67. a) $y = \dfrac{3x + 1}{x + 1}$, y có nghĩa khi $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ nên $\mathcal{D} = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

b) $y = \sqrt{x^2 + 1}$, y có nghĩa với mọi $x \in \mathbf{R}$ nên $\mathcal{D} = \mathbf{R}$

c) $y = \sqrt{2x + 1}$, y có nghĩa khi $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$, nên $\mathcal{D} = \left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

d) $y = \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x}}$, y có nghĩa khi $\sqrt{x} \neq 0$, suy ra $x > 0$, nên $\mathcal{D} = (0 ; +\infty)$

e) $y = \sqrt[3]{5 - x}$, y có nghĩa với mọi x, suy ra $\mathcal{D} = \mathbf{R}$.

68. Hàm số $y = f(x)$, với tập xác định $\mathcal{D}$

- $f(x)$ là hàm chẵn nếu $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(x) = f(-x)$
- $f(x)$ là hàm lẻ nếu $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(x) = -f(-x)$

a) Hàm số $y = x(|x| - 4)$, có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbf{R}$ nên $x \in \mathbf{R}$ thì $-x \in \mathbf{R}$ và $f(-x) = (-x)(|-x| - 4) = -x(|x| - 4) = -f(x)$ nên hàm đã cho là hàm lẻ.

b) $y = 2x^2 - |x| + 8$, có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbf{R}$, nên $x \in \mathbf{R}$ thì $-x \in \mathbf{R}$ và $f(-x) = 2(-x)^2 - |-x| + 8 = 2x^2 - |x| + 8 = f(x)$ nên hàm đã cho là hàm lẻ.

69. $D(m)$: $y = mx + 1 - m \Rightarrow D(m) : y - mx + m - 1 = 0$

$$(y - 1) + m(1 - x) = 0 \qquad (*)$$

Muốn vế trái của (*) bằng không với mọi m thì $\begin{cases} 1 - x = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy khi m thay đổi $D(m)$ luôn quay quanh điểm $A(1 ; 1)$

70. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị G. Điểm $M(x_0 ; y_0) \in G \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$

Có parabol $(P) : y = x^2 + x - 1$;

a) Với $x = -1$ thì $y = (-1)^2 - 1 - 1 = -1$ nên $M(-1 ; -1) \in (P)$;

Với $x = 2$ thì $y = 2^2 + 2 - 1 = 5 \neq 3$ nên $N(2 ; 3) \notin (P)$.

b) (d) đi qua N(2 ; 3) có phương trình $y = k(x - 2) + 3$, (d) có giao điểm kép với (P) khi và chỉ khi phương trình $x^2 + x - 1 = k(x - 2) + 3$ có nghiệm kép.

$\Leftrightarrow x^2 + (1 - k)x + 2k - 4 = 0$ có nghiệm kép.

$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (1 - k)^2 - 4(2k - 4) = 0 \Leftrightarrow k^2 - 10k + 16 = 0$

$\Leftrightarrow (k - 2)(k - 8) = 0 \Leftrightarrow k = 2, k = 8$

Vậy ta có hai đường thẳng đi qua N(2 ; 3) :

$y = 2(x - 2) + 3$, $y = 8(x - 2) + 3$.

71. $y = f(x) = x^3 + ax$ có tập xác định **R**.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_2 > x_1$, ta có : $f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 + ax_2 - x_1^3 - ax_1$

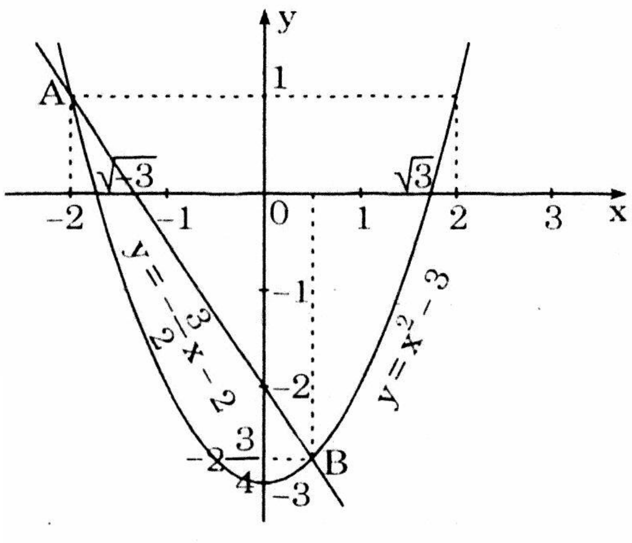
$$= \underbrace{x_2^3 - x_1^3}_{>0} + \underset{\geq 0}{a}\underbrace{(x_1 - x_2)}_{>0}$$

Suy ra $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$. Vậy hàm số $y = f(x) = x^3 + ax$ đồng biến với $a \geq 0$.

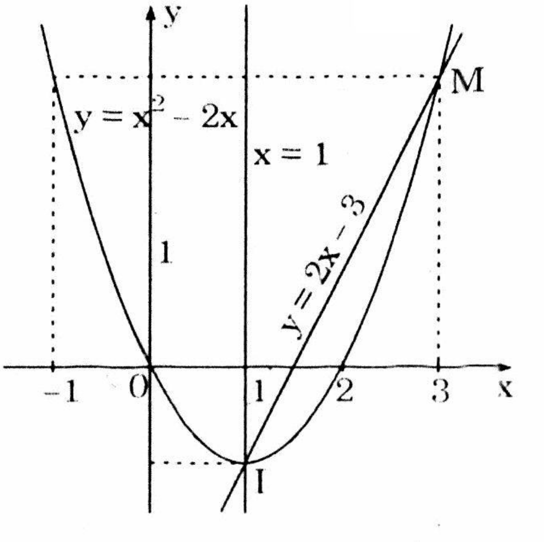
72. a) $y = x^2 - 3$ và $y = -\frac{3}{2}x - 2$

Hai giao điểm là

$A(-2 ; 1)$, $B\left(\frac{1}{2} ; -2\frac{3}{4}\right)$



Hình 20



Hình 21

b) $y = x^2 - 2x$ và $y = 2x - 3$

Hai giao điểm là $I(1 ; -1)$, $M(3 ; 3)$

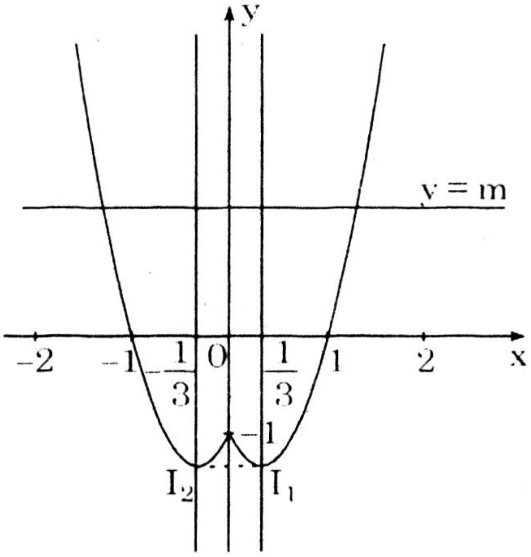
c) $y = -2x^2 - 3x + 1$

$y = 3x - 2$

HS tự làm.

73. a) $y = 3x^2 - 2|x| - 1 = \begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 \text{ nếu } x \geq 0 \ (1) \\ 3x^2 + 2x - 1 \text{ nếu } x < 0 \ (2) \end{cases}$

(1) * $I_1\left(\frac{1}{3}; -1\frac{1}{3}\right)$, * trục đối xứng $x = \frac{1}{3}$



Hình 22

* Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$y = 3x^2 - 2x - 1$	$+\infty$	↘	$-1\frac{1}{3}$	↗	$+\infty$

(2) * $I_2\left(-\frac{1}{3}; -1\frac{1}{3}\right)$

* Trục đối xứng $x = -\frac{1}{3}$

* Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$y = 3x^2 - 2x - 1$	$+\infty$	↘	$-1\frac{1}{3}$	↗	$+\infty$

Đồ thị là hình 22.

b) $3x^2 - m = 2|x| + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2|x| - 1 = m$.

Vẽ trên cùng một mặt phẳng toạ độ hai hàm số $y = 3x^2 - 2|x| - 1$ và $y = m$. (Đường $y = m$ là đường thẳng song song với trục hoành). Trên đồ thị ta thấy :

- $m < -1\frac{1}{3}$, phương trình *vô nghiệm*
- $m = -1\frac{1}{3}$, phương trình có *hai nghiệm kép*
- $-1\frac{1}{3} < m < -1$, phương trình có *bốn nghiệm*
- $m = -1$, phương trình có *ba nghiệm*
- $m > -1$, phương trình có *hai nghiệm*

c) $f(x) = x^2 - 7x + m$. Đồ thị của hàm số là đường cong parabol quay bề lõm về phía trên (vì $a = 1 > 0$), nên tung độ đỉnh I của parabol là giá trị nhỏ nhất của hàm số. Hoành độ của đỉnh I là $\frac{7}{2}$. Ta có $3 < \frac{7}{2} < 4$. Do đó

$$\min_{[3;4]} f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{7^2 - 4m}{4}$$

Theo đề bài ta có : $\frac{4m - 49}{4} = 2 \Rightarrow m = \frac{57}{4}$

74. HS tự làm.

75. Nếu $x_0 \in D$ thì $f(x_0), g(x_0), h(x_0)$ là các số xác định nên ta có :

$$f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) + h(x_0) = g(x_0) + h(x_0).$$

Từ điều này ta suy ra nếu $x_0 \in D$ và x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ thì cũng là nghiệm của phương trình $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ và ngược lại nên chúng tương đương với nhau.

76. Gọi T_1 là tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ và T_2 là tập nghiệm của phương trình $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$. Ta phải chứng minh $T_2 \supset T_1$.

Thật vậy $[f(x)]^2 = [g(x)]^2 \Leftrightarrow [f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 0$

$$\Leftrightarrow [f(x) - g(x)][f(x) + g(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Rõ ràng $T_2 \supset T_1$.

Vậy phương trình $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$ là phương trình hệ quả của phương trình $f(x) = g(x)$; $(f(x) = g(x) \Rightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2$.

Nhận xét. • Khi biến đổi phương trình dẫn đến phương trình hệ quả, khi tìm được nghiệm của phương trình hệ quả phải thay vào phương trình đã cho để loại nghiệm ngoại lai.

• Khi $f(x), g(x)$ cùng dấu $\forall x$ thoả mãn ĐKXĐ thì

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2$$

77. 1) $\frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$

a) ĐKXĐ : $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

b) $\frac{x}{x+1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x = 2x + 2 \Leftrightarrow x = 2 \in D$, vậy $x = 2$ là nghiệm của phương trình.

2) a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ b) $D = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

78. a) Với $m = -\frac{1}{2}$, phương trình đã cho có dạng

$$-\frac{1}{2}(x + 1) = \left(-\frac{1}{2} + 3\right)x - 5$$

$\Leftrightarrow\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad -3x = -4,5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,5$

b) $x = 1$ ta có $2m = m + 3 - 5 \Leftrightarrow m = -2$

79. 1) a) Hai phương trình là tương đương vì cùng chung tập nghiệm $T = \{2\ ;3\}$

b) Hai phương trình là tương đương vì cùng chung tập nghiệm $T = \{-2\ ;2\}$

c) Hai phương trình có cùng tập nghiệm $T = \{1\}$ nên chúng tương đương

d) $x - a = 2 \Leftrightarrow x = a + 2$

$$(x - a)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 + a \\ x = -2 + a \end{array}\right.$$

nên hai phương trình $(x - a)$ và $(x - a)^2 = 4$ không tương đương

2) Phương trình $|x - 9| = |x| \Leftrightarrow (x - 9)^2 = x^2$ vì ở phương trình thứ nhất vế phải và vế trái luôn dương với $\forall x \in \mathbf{R}$ (cùng dấu) nên khi bình phương hai vế ta được phương trình mới tương đương với phương trình đã cho (xem bài tập 5).

Khi giải phương trình $|x - 9| = |x|$ ta có thể bình phương hai vế để "bỏ" dấu giá trị tuyệt đối ở hai vế và được phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

$|x - 9| = |x| \Leftrightarrow (x - 9)^2 = x^2 \Leftrightarrow (x - 9)^2 - x^2 = 0$

$(x - 9 - x)(x - 9 + x) = 0 \Leftrightarrow x = 4,5$

80. a) ĐKXĐ : $D = \{0\}$ thay $x = 0$ vào hai vế của phương trình cho ta đẳng thức đúng, vậy $x = 0$ là nghiệm của phương trình .

Chú ý : Ta cũng có thể giải bằng cách bình phương hai vế.

b) Muốn phương trình có nghĩa thì :

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \\ 3 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \quad \text{nên} \quad D = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

thay $x = \frac{3}{2}$ vào hai vế của phương trình ta có vế trái $\neq$ vế phải nên phương trình vô nghiệm.

c) $D = [1\ ; +\infty)\ ;\ x - \sqrt{x - 1} = 1 - \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 1}$

$x = 1 \in D.$

Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

81. HS tự làm.

82. a) $(13x - 15) - (9 + 6x) = -3x \Leftrightarrow 13x - 15 - 9 - 6x = -3x$

$\Leftrightarrow 13x - 6x + 3x = 15 + 9$

$\Leftrightarrow \quad 10x = 24$

$\Leftrightarrow \quad x = 2,4$

b) ĐS : $x = -12$; c) $x = -32$

83. a) $a = -1$, phương trình có dạng : $\dfrac{-1}{x+1} = 1$ (3), ĐKXĐ: $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

(3) $\Leftrightarrow x + 1 = -1 \Leftrightarrow x = -2 \in D$, nên nghiệm của phương trình là $x = -2$.

b) $\dfrac{2a+1}{x+1} = a + 2$, ĐKXĐ: $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

$\Leftrightarrow 2a + 1 = (a + 2)(x + 1) \Leftrightarrow (a + 2)x = 2a + 1 - a - 2$

$\Leftrightarrow (a + 2)x = a - 1$

- Nếu $a + 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -2$, phương trình có một nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a-1}{a+2}$
- Nếu $a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$, phương trình đưa về dạng $0x = -3$, phương trình vô nghiệm.

84. a) $\dfrac{6y+7}{4} + \dfrac{8-5y}{3} = 5 \Leftrightarrow 18y + 21 + 32 - 20y = 60$

$\Leftrightarrow -2y = 7 \Leftrightarrow y = -3{,}5$

b) $\Leftrightarrow 25x - 5 = 6x - 9 - 15 \Leftrightarrow 19x = -19 \Leftrightarrow x = -1$

c) ĐS : $x = 5$

85. a) $(x + 1)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \\ x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1, x = 5$

b) ĐS : $x = 1, x = 4, x = -3$

c) ĐS : $x = -3, x = 3, x = -2, x = 2$

86. a) $D = \mathbf{R}$, $m(x + 1) = x - n \Leftrightarrow (m - 1)x = -m - n$

- Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{-m-n}{m-1}$
- Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$, phương trình có dạng $0x = -n$

* nếu $n = 0$, phương trình có dạng $0x = 0$, phương trình vô số nghiệm .

* nếu $n \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

b) $D = \mathbf{R}$, $m(2x + 1) = nx + 1 \Leftrightarrow (2m - n)x = 1 - m$

- Nếu $2m - n \neq 0, 2m \neq n$, phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{1-m}{2m-n}$
- Nếu $2m - n = 0 \Leftrightarrow 2m = n$ và $m \neq 1$ thì phương trình có dạng $0x = 1 - m$, vế phải bằng 0, vế trái khác 0, vậy phương trình vô nghiệm.

Nếu $2m = n$ và $m = 1$ thì phương trình có dạng $0x = 0$, vậy phương trình vô số nghiệm.

c) ĐKXĐ: $D = \mathbf{R}$

$$|x + m| = |x - m + 2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + m = x - m + 2 & (1) \\ x + m = -x + m - 2 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1) : (1) $\Leftrightarrow 0x = -2m + 2$

Với $m = 1$, phương trình (1) vô số nghiệm

Với $m \neq 1$, phương trình (1) vô nghiệm

Giải (2) : (2) $\Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$ (với mọi m)
Kết luận : Với $m = 1$, phương trình đã cho vô số nghiệm
Với $m \neq 1$, phương trình đã cho có nghiệm $x = -1$

87. Với $a \neq 0$ phương trình có nghiệm $x = \frac{6}{2}$. Muốn phương trình có nghiệm nguyên a là ước của 6, nên ta có : $a \neq \pm 1$; $a = \pm 2$; $a = \pm 3$; $a = \pm 6$.

88. Ta biết 13 là số nguyên tố, nên không có số nguyên nào nhân với 7 bằng 13. Nếu phương trình đã cho có nghiệm nguyên x = a (a là số nguyên) thì $(2x + 1)$ là số nguyên và $7 \times (2x + 1) = 13$ trái với điều khẳng định trên. Do đó phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

89. Phương trình $3x - y = 15$; $13x + 6y = 0$ là các phương trình bậc nhất hai ẩn.

90. a) Cặp (4 ; – 3) ; (3 ; – 1) là nghiệm của phương trình $2x + y = 5$.

b) Cặp (4 ; – 3) ; (–5 ; 0) là nghiệm của phương trình $x + 3y = -5$.

91. a) $x + y = 2,2$; $3x - y = 1,8$; $-2x + 5y = 4$ ...

b) $x + 2y = 0$; $-5x - y = -9$; $3x - 2y = 8$ ...

92. a) $y = 5x - 7$; ba cặp số là nghiệm nguyên của phương trình : (0 ; –7) ; (1 ; –2) ; (2 ; 3) ...

b) $5x + 8y = 3 \Leftrightarrow 5x = 3 - 8y \Leftrightarrow x = \frac{3 - 8y}{5}$

93. HS tự làm.

94. Hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (*) \ (a_1^2 + b_1^2 \neq 0 \text{ và } a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$Dx = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$Dy = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

- Nếu $D \neq 0$ thì hệ phương trình (*) có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} \\ y = \dfrac{Dy}{D} \end{cases}$$

- Nếu $D = 0$, hệ vô nghiệm khi $Dx \neq 0$ hoặc $Dy \neq 0$. Hệ vô số nghiệm khi $Dx = Dy = 0$

a) $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất :

$$Dx = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 12, \quad Dy = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} = \dfrac{12}{4} = 3 \\ y = \dfrac{Dy}{D} = \dfrac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

b) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 9$, $Dx = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = 0$, $Dy = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 18$

Phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x = 11 - 3y \\ 6y = 22 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 4x + 6y = 22 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad Dx = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 22 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad Dy = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 4 & 22 \end{vmatrix} = 0$$

Vậy phương trình đã cho vô số nghiệm.

95. a) $\begin{cases} 5x - 4y = 1 \ (1) \\ 3x + 1 = 13 \ (2) \\ 7x - 5y = 1 \ (3) \end{cases}$. Trước hết ta giải hệ $\begin{cases} 5x - 4y = 1 \\ 3x + 1 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -\dfrac{19}{4} \end{cases}$

Thay $\begin{cases} x = 4 \\ y = -\dfrac{19}{4} \end{cases}$ vào (3), nếu nó nghiệm đúng thì cặp số đó là nghiệm của phương trình đã cho, nếu nó không nghiệm đúng thì hệ đã cho vô nghiệm

$7 \times 4 - 5\left(-\dfrac{19}{4}\right) \neq 1$. Do đó hệ a) vô nghiệm

b) $\begin{cases} 11x + 3y = 1 \quad (1) \\ 2x + y = 3 \quad (2) \\ 5x + 2y = \dfrac{22}{5} \quad (3) \end{cases}$

$\begin{cases} 11x + 3y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ (*) $D = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$, $Dx = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8$, $Dy = \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 31$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là : $\begin{cases} x = -\dfrac{8}{5} \\ y = \dfrac{31}{5} \end{cases}$

Thay vào vế phải của (3) ta có :

$5.\left(-\frac{8}{5}\right) + \frac{62}{5} = \frac{22}{5}$ nghiệm đúng phương trình (3). Vậy hệ đã cho có nghiệm là $\left(-\frac{8}{5} ; \frac{31}{5}\right)$

96. a) $D = \begin{vmatrix} m-1 & 2 \\ m & -3 \end{vmatrix} = -3m + 3 - 2m = -5m + 3$

$$Dx = \begin{vmatrix} 2m+1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6m - 3,\ Dy = \begin{vmatrix} m-1 & 2m+1 \\ m & 0 \end{vmatrix} = -m(2m+1)$$

- Nếu $D = -5m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{5}$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{-6m-3}{-5m+3} \\ y = \dfrac{-m(2m+1)}{-5m+3} \end{cases}$

- Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{5}$

$Dx = -6.\frac{3}{5} - 3 \neq 0$. Hệ đã cho vô nghiệm.

b) $D = \begin{vmatrix} k & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = k - 12$

$$Dx = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;\ Dy = \begin{vmatrix} k & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = k - 12$$

- Nếu $D \neq 0 \Rightarrow k - 12 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 12$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$
- Nếu $D = 0 \Rightarrow k = 12$ ta có $Dx = 0$, $Dy = 0$. Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm.

97. a) $\begin{cases} |x| + y = 4 \\ x + 3|y| = 6 \end{cases}$

Với $x \geq 0$, $y \geq 0$ ta có hệ $\begin{cases} x + y = 4 \\ x + 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 > 0 \\ y = 1 > 0 \end{cases}$ thoả mãn điều kiện xác định nên $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ là một nghiệm của phương trình.

- Với $x \geq 0$, $y < 0$, ta có hệ : $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

thoả mãn ĐKXĐ nên cũng là một nghiệm.

- Với $x < 0, y \ge 0$, ta có hệ $\begin{cases} -x + y = 4 \\ x + 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1,5 \\ y = 2,5 \end{cases}$ thoả mãn ĐKXĐ nên cũng là một nghiệm

- Với $x < 0, y < 0$, ta có hệ $\begin{cases} -x + y = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{(x + y)^2} = 5 \\ \sqrt{(x - y)^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + y| = 5 \\ |x - y| = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm 5 \\ x - y = \pm 1 \end{cases}$ hệ phương trình này tương đương với 4 hệ phương trình sau :

1) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = -1 \end{cases}$

1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ 2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ 3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$ 4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$

c) Khi giải hệ 3 phương trình ba ẩn ta thường làm như sau:

- Biểu thị một ẩn qua hai ẩn còn lại từ một trong ba phương trình của hệ, rồi thay vào hai phương trình còn lại đưa về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Dùng phương pháp cộng đại số, đưa hệ đã cho về hệ phương trình dạng tam giác (phương pháp Crame)

Giải phương trình

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -3x + 4y + 2z = 11 \end{cases} \text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z - y \\ 2(z - y) - y + 3z = 9 \\ -3(z - y) + 4y + 2z = 11 \end{cases} \text{(II)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 & (1) \\ -3y + 5z = 9 & (2) \\ 7y - z = 11 & (3) \end{cases} \text{(III)}$$

(nhân phương trình (2) với 7 và nhân phương trình (3) với 3 rồi cộng vế với vế của hai phương trình trên, ta có hệ (IV) ⇔ (III)

$$\text{(IV)} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -3y + 5z = 9 \\ 32z = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

98. 1) Gọi x, y theo thứ tự là thời gian ô tô đi với vận tốc 40 km/giờ, 60 km/giờ ; x, y dương, x, y tính bằng giờ. Ô tô đi quãng đường mất 8 giờ nên có phương trình $x + y = 8$

Quãng đường ô tô đi với vận tốc 40 km/giờ là : $40.x$

Quãng đường ô tô đi với vận tốc 60 km/giờ là : $60.y$

Mà quãng đường ô tô đã đi là 360 km nên ta có phương trình :

$$40x + 60y = 360$$

Do đó ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 4x + 6y = 36 \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 36 & 6 \end{vmatrix} = 12$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 36 \end{vmatrix} = 4$$

Ta có $\begin{cases} x = \dfrac{12}{2} = 6 \\ y = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$

Vậy ô tô đã đi trong 6 giờ với vận tốc 40 km/giờ và 2 giờ với vận tốc 60 km/giờ.

2) Gọi x, y theo thứ tự là tuổi của người anh, người em hiện nay, x, y là nguyên dương

Cách đây 2 năm tuổi của người anh gấp 2 lần tuổi của người em, nên ta có phương trình

$$x - 2 = 2(y - 2)$$

Sau 2 năm nữa tuổi của người anh hơn tuổi của người em là 8 tuổi, nên ta có phương trình :

$$x + 2 = y + 2 + 8.$$

Do đó ta có hệ phương trình sau : $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 10 \end{cases}$

Hiện nay người anh 18 tuổi, người em 10 tuổi.

99. 1) Chỉ có phương trình $3x^2 + 4x = -1 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0$ là phương trình bậc hai một ẩn.

2) $ax^2 + bx + c = 0 (1)\ (a \neq 0) \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \ (*). \text{ Đặt } \Delta = b^2 - 4ac$$

- Nếu $\Delta < 0$ không khai phương hai vế của (*) được, nên phương trình (1) vô nghiệm
- Nếu $\Delta = 0 \Rightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$, phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$
- Nếu $\Delta > 0$ khai phương được hai vế ta có $x + \dfrac{b}{2a} = \pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm : $x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

100. a) $8x^2 - 7x - 2,25 = 0$ có $a = 8, b = -7, c = -2,25$

$$\Delta = 49 - 4.8.(-2,25) = 121 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 11$$

$$x_1 = \frac{-8+11}{16} = \frac{3}{16}$$

$$x_2 = \frac{-8-11}{16} = -\frac{19}{16}$$

b) $\frac{2}{3}x^2 + 3x - 1\frac{2}{3} = 0,\quad \Delta = 9 - 4.\frac{2}{3}.\left(-\frac{5}{3}\right) = 9 + \frac{40}{9} = \frac{121}{9},\quad \sqrt{\Delta} = \frac{11}{3}$

$$x_1 = \frac{-3+\frac{11}{3}}{\frac{2}{3}.2} = \frac{\frac{2}{3}}{2.\frac{2}{3}} = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{-3-\frac{11}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{-20}{3}}{\frac{4}{3}} = -5$$

c) ĐS : $x_1 = 3, x_2 = \frac{2}{3}$

d) ĐS : $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

101. $2x^2 + mx + m^2 - 5 = 0$

a) Có nghiệm $x = 1 \Rightarrow 2 + m + m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow m_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2},\quad m_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

b) Có nghiệm $x = -1 \Rightarrow 2 - m + m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow m_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2},\quad m_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

c) Chỉ có một nghiệm thì $\Delta = 0$

$$\Delta = m^2 - 4.2.(m^2 - 5) = -7m^2 + 40 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\frac{40}{7}}$$

102. a) $3m^2x^2 - mx - 4 = 0$

- Nếu $m = 0$ thì phương trình vô nghiệm
- Nếu $m \neq 0$ thì $\Delta = m^2 + 48m^2 = 49m^2$, $\sqrt{\Delta} = 7|m|$

$$x_1 = \frac{m + 7|m|}{6m^2}, \quad x_2 = \frac{m - 7|m|}{6m^2}$$

b) $(m + n)x^2 - 2mx + m - n = 0, \quad \Delta' = m^2 - (m + n)(m - n) = n^2, \ \sqrt{\Delta'} = |n|$

$$x_1 = \frac{m + |n|}{m + n}, x_2 = \frac{m - |n|}{m + n}$$

c) **ĐKXĐ** : $y \neq 3$

$$(c) \Leftrightarrow \frac{y}{m(m - n)} + \frac{y}{m(y - 3)} + \frac{1}{y - 3} = \frac{m + 3}{(y - 3)(m - n)}$$

MSC : $m(m - n)(y - 3)$

$\Leftrightarrow y(y - 3) + (m - n)y + m(m - n) = m(m + 3)$

$y^2 + (m - n - 3)y - m(n + 3) = 0, \quad \Delta = (m - n - 3)^2 + 4m(n + 3)$

$\Delta = m^2 + n^2 = 9 - 2mn - 6m + 6n + 4mn + 12m$

$\quad = m^2 + n^2 + 9 + 2mn + 6m + 6n = (m + n + 3)^2$

$\sqrt{\Delta} = |m + n + 3| = m + n + 3$ (do $m + n > 0$

$$y_1 = \frac{-(m - n - 3) + m + n + 3}{2} = n + 3$$

$$y_2 = \frac{-(m - n - 3)^2 - (m + n + 3)}{2} = -m$$

Muốn hai nghiệm này thoả mãn điều kiện xác định thì $n + 3 \neq 3 \Rightarrow n \neq 0$, $-m \neq 3$, $m \neq -3$.

- Nếu $n \neq 0$ và $m \neq -3$, phương trình đã cho có 2 nghiệm

  $y_1 = n + 3, \quad y_2 = -m$
- Nếu $n = 0, m \neq -3$, phương trình có một nghiệm $y = -m$
- Nếu $n \neq 0, m = -3$, phương trình có một nghiệm $y = n + 3$
- Nếu $n = 0$ và $m = -3$, phương trình đã cho vô nghiệm

103. 1) Muốn phương trình đã cho vô số nghiệm thì :

$$\begin{cases} a^2 - 3a + 2 = 0 \\ a^2 - 5a + 4 = 0 \Rightarrow a = 1. \\ a - a^2 = 0 \end{cases}$$

2) a) **ĐKXĐ**: $x \neq -1, m \neq 1$

(a) $\Leftrightarrow x(x + 1) = 2(m - 1) \Leftrightarrow x^2 + x - 2(m - 1) = 0$

$\Delta = 1^2 + 8(m - 1) = 8m - 7$

- Nếu $\Delta < 0 \Rightarrow 8m - 7 < 0 \Rightarrow m < \frac{7}{8}$, phương trình vô nghiệm
- Nếu $\Delta = 0 \Rightarrow m = \frac{7}{8}$, phương trình có nghiệm kép $x_{1,2} = -\frac{1}{2}$
- Nếu $\Delta > 0 \Rightarrow m > \frac{7}{8}$ và $m \neq 1$, phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{\Delta}}{2}$$

c) Phương trình $2mx^2 - 2(\sqrt{2}m - 1)x + m = 0$

- Nếu $m = 0$, phương trình có dạng $0x^2 + 2x = 0$, phương trình có nghiệm $x = 0$.
- Nếu $m \neq 0$, $\Delta' = (\sqrt{2}m - 1)^2 - 2m^2 = -2\sqrt{2}m + 1$

* Nếu $\Delta' < 0 \Rightarrow -2\sqrt{2}m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2\sqrt{2}}$, phương trình vô nghiệm

* Nếu $\Delta' = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, phương trình có một nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}m - 1}{2m}$$

* Nếu $\Delta' > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2\sqrt{2}}$, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}m - 1 \pm \sqrt{\Delta'}}{2m}$$

Tóm lại :

- Nếu $m = 0$, phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.
- Nếu $m = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}m - 1}{2m}$.
- Nếu $m > \frac{1}{2\sqrt{2}}$, phương trình vô nghiệm.
- Nếu $0 \neq m < \frac{1}{2\sqrt{2}}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}m - 1 \pm \sqrt{-2\sqrt{2}m + 1}}{2m}$$

104. a) $x^2 - |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - x - 2 = 0, \text{ nếu } x \geq 0 & (1) \\ x^2 + x - 2 = 0, \text{ nếu } x < 0 & (2) \end{array}\right.$

Giải (1) $\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

$x^2 - x - 2 = 0$ $x_1 = -1$ (loại), $x = 2$ chấp nhận

Vậy (1) có nghiệm $x = 2$

Giải (2) $\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2, x = -2$.

b) $x^2 + 5|x| + 4 = 0$, phương trình này vô nghiệm vì vế trái luôn luôn dương với mọi x.

105. a) $2x^2 - |5x - 2| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - (5x - 2) = 0, \text{ nếu } x \geq \frac{2}{5} & (1) \\ 2x^2 + (5x - 2) = 0, \text{ nếu } x < \frac{2}{5} & (2) \end{cases}$

Giải (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ x \geq \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, x = 2$$

Giải (2) $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 2 = 0 \\ x < \frac{2}{5} = 0{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-5 - \sqrt{41}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2, x_3 = \frac{-5 - \sqrt{41}}{2}$

b) $x^2 - |x - 1| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = 0, \text{ nếu } x \geq 1 & (1) \\ x^2 + x - 1 = 0, \text{ nếu } x < 1 & (2) \end{cases}$

Cũng làm tương tự như câu a), phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

106. a) $x^2 - 2x + m = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = -m$.

- Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ (1)

Toạ độ đỉnh $I(1 ; -2)$

Trục đối xứng $x = 1$

Lấy thêm một số điểm

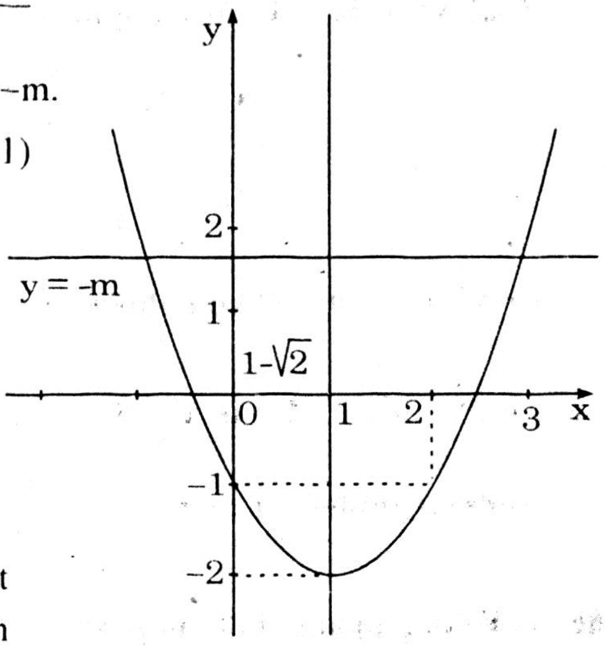
$x = 0 \Rightarrow y = -1$

$x = 2 \Rightarrow y = 4 - 4 - 1 = -1$

Đồ thị là hình 23

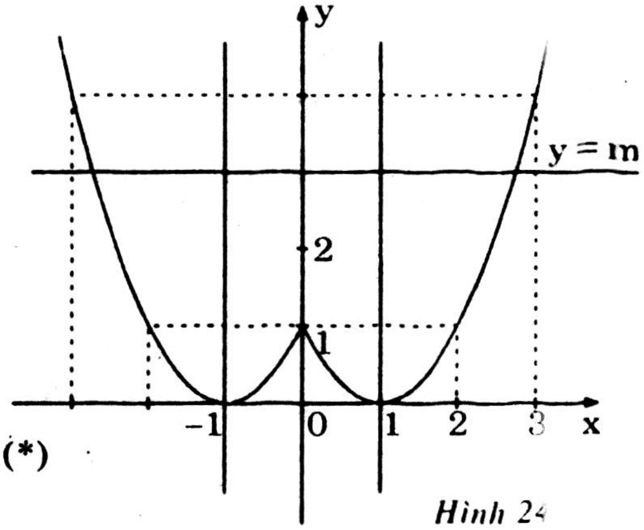
- Đồ thị hàm số $y = -m$ là một đường thẳng song song với trục hoành

Từ đó ta có kết luận sau :



Hình 23

- Nếu $-m < -2 \Leftrightarrow m > 2$ đường thẳng $y = -m$ không cắt parabol (P) $y = x^2 - 2x - 1$ nên phương trình vô nghiệm.



Hình 24

- Nếu $-m = -2 \Rightarrow m = 2$ đường thẳng tiếp xúc với P phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 1$.
- Nếu $-m > -2 \Leftrightarrow m < 2$ đường thẳng cắt (P) tại hai điểm phân biệt nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Phương trình $x^2 - 2|x| + 1 = m$ (*)

- Vẽ đồ thị hàm số

$$y = x^2 - 2|x| + 1 = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, \text{ nếu } x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1, \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

- Đường $y = m$ là đường thẳng song song với trục hoành

Vậy :

* Nếu $m < 0$, phương trình (*) vô nghiệm.

* Nếu $m = 0$, phương trình (*) có hai nghiệm kép $x_1 = x_2 = -1$; $x_3 = x_4 = 1$.

* Nếu $0 < m < 1$, phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt.

* Nếu $m = 1$, phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm $x = 0$.

* Nếu $m > 1$, phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt (hai nghiệm đối nhau).

107. 1., 2. HS tự làm.

3. a) $x^2 + 5x - 3 = 0$ có nghiệm vì $c = -3 < 0$. Ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{5}{1} = -5 \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = -3 \end{cases}$$

b) $x^2 + x - 4 = 0$ có nghiệm. Ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = -4 \end{cases}$

c) $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$, có $\Delta = \left(-\sqrt{5}\right)^2 - 4.1.1 = 5 - 4 = 1 > 0$, nên phương trình có nghiệm. Ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = \sqrt{5} \\ x_1x_2 = 1 \end{cases}$

108. 1) Không khẳng định được vì $5 + 3 \neq \dfrac{-16}{1} = -16$

2) Nếu -4 và -2 là nghiệm của phương trình bậc 2 thì phương trình đó là $x^2 + 6x + 8 = 0$ (vì $-4 + -2 = 6$; $(-4).(-2) = 8$). Cho nên nếu $p = 6$ thì khẳng định được -4 và -2 là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 + px + 8 = 0$.

109. $3x^2 + 5x - 1 = 0$ có $c = -1$ nên phương trình có hai nghiệm và theo định lí Viét ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{5}{3} \\ x_1x_2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = \frac{31}{9}$$

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2)$$

$$= -\frac{5}{3}\left(\frac{31}{9} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{3} \times \frac{34}{9} = -\frac{170}{27}$$

$$S_4 = x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4x_1x_2 - 6x_1^2x_2^2 - 4x_1x_2^3$$

$$= (x_1 + x_2)^4 - 4x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) - 6(x_1x_2)^2$$

$$= \left(-\frac{5}{3}\right)^4 + \frac{4}{3}.\frac{31}{9} - 6\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{625}{81} + \frac{124}{27} - \frac{6}{9} = \frac{943}{81}$$

110. a) $x^2 - 17x + 66 = 0$ $\Delta = (-17)^2 - 4.1.66 = 25 > 0$, nên tổng và tích của hai nghiệm x_1, x_2 là :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 17 \\ x_1x_2 = 66 \end{cases}$$

Do $x_1x_2 = 66 > 0$ nên x_1, x_2 cùng dấu và $x_1 + x_2 = 17 > 0$ nên x_1, x_2 dương. Tóm lại hai nghiệm của phương trình a) là hai nghiệm dương.

b) $x^2 + 4x + 3 = 0$, $\Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1x_2 = 3 \end{cases}$

Hai nghiệm của phương trình b) là hai nghiệm âm.

c) Phương trình có hai nghiệm dương.

d) Phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

111. a) Nếu phương trình có nghiệm thì theo hệ thức Viét ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{3a}{a^2} = -\dfrac{3}{a} > 0 \text{ vì } a < 0 \\ x_1x_2 = \dfrac{2}{a^2} > 0 \end{cases}$$

Vậy hai nghiệm của phương trình này (nếu có) là hai nghiệm dương.

b) $2x^2 - mx - m^2 = 0$ $(m > 0)$

Theo hệ thức Viét (V) ta có : $x_1 + x_2 = \dfrac{m}{2} > 0$

$$x_1x_2 = -\frac{m^2}{2} < 0$$

Vậy phương trình này có hai nghiệm trái dấu và giá trị tuyệt đối của nghiệm dương lớn hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm.

112. 1. $S = x_1 + x_2 = 3 + (-2) = 1$

$P = x_1x_2 = 3.(-2) = -6.$

Vậy x_1, x_2 là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - x - 6 = 0$

2. $x^2 - 10x + 16 = 0$;

3. $x^2 + ax - 12a = 0$

4. $x^2 - 4m + 4m^2 - n^2 = 0$

113. a) $\Delta' = (m + 1)^2 - (m + 2)m = 1 > 0$

Muốn phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$

b) Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi

$$\frac{c}{a} < 0, \frac{c}{a} = \frac{m}{m+2} < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 0$$

Vậy với $-2 < m < 0$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu.

c) Nếu $x = -1$ thì ta có : $m + 2 + 2(m + 1) + m = 0 \Leftrightarrow 4m = -4 \Leftrightarrow m = -1.$

d) $x_1^3 + x_2^3 = -\dfrac{b^3}{a^3} + 3\dfrac{bc}{a^2} = \dfrac{8(m+1)^3}{(m+2)^3} + 3\dfrac{-2(m+1)m}{(m+2)^3} = \dfrac{2(m+1)^2[4(m+1) - 3m]}{(m+2)^3}$

$$x_1^3 + x_2^3 = 2 \Rightarrow \frac{2(m+1)^2(m+4)}{(m+2)^3} = 2$$

$$\Leftrightarrow m^3 + 6m^2 + 9m + 4 = m^3 + 6m^2 + 12m + 8$$

$$\Leftrightarrow -3m = 4 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}$$

114. a) $x^2 - (k + 2)x + k = 0$

$\Delta = (k + 2)^2 - 4k = k^2 + 4 > 0 \; \forall k$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) $kx^2 + 2x - 2 = 0$

- Nếu $k = 0$, phương trình có dạng $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- Nếu $k \neq 0$, $\Delta' = 1^2 + 2k$

* Nếu $1 + 2k > 0 \Leftrightarrow k > -\dfrac{1}{2}$, $k \neq 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

* Nếu $1 + 2k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$ phương trình có một nghiệm kép

* Nếu $k < -\frac{1}{2}$, phương trình vô nghiệm

115. Ta có $\Delta'_1 = (n+1)^2 - (m-1)p = n^2 + 2n + 1 - mp + p$

$$\Delta'_2 = p^2 - (n+1)(m-1) = p^2 - mn - m + n + 1$$

$$\Delta'_3 = (m-1)^2 - p(n+1) = m^2 - 2m + 1 - pn - p$$

$$\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 = \frac{1}{2}\left(m^2 + n^2 + 4 - 2mn - 4m + 4n\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(n^2 + p^2 + 1 - 2n - 2np - 2p\right) + \frac{1}{2}\left(p^2 + m^2 + 1 - 2pm - 2p - 2m\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(m - n - 2)^2 + (n - p + 1)^2 + (p - m + 1)^2\right] > 0$$

Vậy trong đó phải có một $\Delta' > 0$, nên một trong ba phương trình đã cho có ít nhất một phương trình có nghiệm.

Chú ý :

Để giải bài toán loại này có khi ta chứng minh $\Delta'_1 + \Delta'_2 > 0$ hay $\Delta'_1 + \Delta'_3 > 0$ hoặc $\Delta'_2 + \Delta'_3 > 0$.

116. 1) Chứng minh rằng : $ax^2 + bx + c = 0$ và $cx^2 + bx + a = 0$ có nghiệm chung duy nhất $\Leftrightarrow |b| = |a + c|$. Ta chứng minh hai phần

- Nếu $ax^2 + bx + c = 0$ (1) và $cx^2 + bx + a = 0$ (2) có nghiệm chung $\Rightarrow |b| = |a + c|$

Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình, vậy ta có

$$ax_0^2 + bx_0 + c = cx_0^2 + bx_0 + a \Leftrightarrow (a - c)x_0^2 = a - c$$

$\Leftrightarrow x_0^2 = \frac{a-c}{a-c} = 1$ ($a - c \neq 0$ vì nếu $a - c = 0 \Rightarrow a = c$ thì hai phương trình trên có quá 1 nghiệm chung)

$$\Leftrightarrow x_0 = \pm 1.$$

* Nếu $x_0 = 1$, ta có $a + b + c = 0 \Rightarrow b = -(a + c)$

* Nếu $x_0 = -1$, ta có $a - b + c = 0 \Rightarrow b = a + c$

Do đó $|b| = |a + c|$

- Nếu $|b| = |a + c|$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ và $cx^2 + bx + a = 0$ có nghiệm chung duy nhất

Thật vậy nếu $b = -(a + c)$ thì phương trình (1) và (2) có dạng

$ax^2 - (a + c)x + c = 0$ có nghiệm $x_1 = 1, x'_2 = \frac{c}{a}$

$cx^2 - (a + c)x + a = 0$ có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{a}{c}$

Vậy hai phương trình (1) và (2) có một nghiệm chung duy nhất $x = 1$

$(x'_2 \neq x_2$ vì $\dfrac{c}{a} \neq \dfrac{a}{c})$

Với $b = (a + c)$ chứng minh tương tự.

2) Gọi x_0 là nghiệm chung của phương trình (1) và (2), ta có :

$$\begin{cases} 3x_0^2 + (5k + 1)x_0 + 1 = 0 \\ 3x_0^2 + 3(2k - 3)x_0 + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = \frac{11}{10 - k}$$

Thay vào (2) ta có

$$\left(\frac{11}{10 - k}\right)^2 + (2k - 3)\frac{11}{10 - k} + 4 = 0 \Leftrightarrow -18k^2 + 173k + 191 = 0$$

$$\Leftrightarrow k_1 = 1, k_2 = -\frac{191}{18}$$

* Với $k = 1 \Rightarrow x_0 = \dfrac{11}{9}$

* Với $k = -\dfrac{191}{18} \Rightarrow x_0 = \dfrac{11.18}{371} = \dfrac{198}{371}$

117. a) $|x - 1| = 3$

Cách 1 : • Với $x \geq 1$, ta có $|x - 1| = 3 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4 \geq 1$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 4$

• Với $x < 1$, ta có $-(x - 1) = 3 \Leftrightarrow x = -2 < 1$

Vậy phương trình có nghiệm thứ hai $x = -2$. Do đó phương trình có hai nghiệm $x = 4, x = -2$

Cách 2 : $|x - 1| = 3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 1 = \pm 3$. Vậy phương trình có hai nghiệm như đã nêu ở trên.

b) Phương trình vô nghiệm vì vế trái luôn luôn dương, vế phải là số âm.

c) $|2x - 1| = |x + 3| \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = x^2 + 6x + 9$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4, x_2 = -\frac{2}{3}$$

d) *Giải theo cách 1*

$$|x + 4| - |x - 4| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 4 + x - 4 = 8 \text{ nếu } x < -4 & (1) \\ x + 4 + x - 4 = 8 \text{ nếu } -4 \leq x < 4 & (2) \\ x + 4 - (x - 4) = 8 \text{ nếu } x \geq 4 & (3) \end{cases}$$

• Phương trình (1) vô nghiệm

• Giải phương trình 2 : (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (không chấp nhận)} \\ -4 \leq x < 4 \end{cases}$

- Giải phương trình 3 : (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 - x + 4 = 8 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4$

Vậy phương trình đã cho có vô số nghiệm với $x \geq 4$.

118. a) $x^2 - |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \text{ nếu } x \geq 0 \ (1) \\ x^2 + x - 2 = 0, \text{ nếu } x < 0 \ (2) \end{cases}$

- Nghiệm của phương trình (1) là $x = 2$ ($x = -1$ (loại))
- Nghiệm của phương trình (2) là $x = -2$ ($x = 1$ (loại))

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \pm 2$.

b) **ĐS** : Phương trình vô nghiệm (vế phải luôn dương $\forall x$)

c) $2x^2 - |5x - 2| = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x^2 - 5x + 2 = 0, \text{ nếu } x \geq \frac{2}{5} & (1) \\ 2x^2 + 5x - 2 = 0, \text{ nếu } x < \frac{2}{5} & (2) \end{array}\right.$

- Phương trình (1) có 2 nghiệm : $x = 2, x = \frac{1}{2}$
- Phương trình (2) có 2 nghiệm : $x = \frac{-5 + \sqrt{41}}{4}, x = \frac{-5\sqrt{41}}{4}$

Vậy tập nghiệm phương trình đã cho là $\left\{\frac{-5 \pm \sqrt{41}}{4}; 2; \frac{1}{2}\right\}$

d) $|x^2 - 1| = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = \pm(x + 3)$

- $x^2 - 1 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}, x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$
- $x^2 - 1 = -x - 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0$, phương trình vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$

119. a) $21 + \sqrt{2x - 7} = x$, **ĐKXĐ** : $x \geq \frac{7}{2}$

Cách 1 : Đặt $\sqrt{2x - 7} = y \Rightarrow y^2 = 2x - 7 \ (y \geq 0) \Rightarrow x = \frac{y^2 + 7}{2}$

Ta có phương trình $21 + y = \frac{y^2 + 7}{2}$ (với $y \geq 0$) (*)

(*) $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2y - 35 = 0 & (y \geq 0) \\ y = 7, y = -5 & \text{(loại)} \end{cases}$

Vậy ta có : $\sqrt{2x - 7} = 7 \Leftrightarrow 2x - 7 = 49 \Leftrightarrow x = 28$

Tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{28\}$.

Cách 2 : a) $\Leftrightarrow \sqrt{2x-7} = x - 21, x \geq 21$

$$\Leftrightarrow 2x - 7 = x^2 - 42x + 441 \Leftrightarrow x^2 - 44x + 448 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 28 \text{ (}x = 16 < 21 \text{ bị loại)}$$

b) $3x - \sqrt{18x+1} + 1 = 0$, **ĐKXĐ** : $x \geq -\dfrac{1}{18}$

Đặt $\sqrt{18x+1} = y$ $(y \geq 0)$, ta có : $18x + 1 = y^2 \Rightarrow x = \dfrac{y^2-1}{18}$

Vậy ta có phương trình

$$\frac{y^2-1}{6} - y + 1 = 0, (y \geq 0) \Leftrightarrow y^2 - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = 1, y = 5$$

- $\sqrt{18x+1} = 1 \Leftrightarrow 18x = 0 \Leftrightarrow x = 0 > -\dfrac{1}{18}$ (chấp nhận)
- $\sqrt{18x+1} = 5 \Leftrightarrow 18x = 24 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3} > -\dfrac{1}{18}$ (chấp nhận)

Tập nghiệm của phương trình đã cho là $\left\{0 ; \dfrac{4}{3}\right\}$

(Cách 2, HS tự làm)

c) $\sqrt{x} - \sqrt{x+3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x+3} \Leftrightarrow x = 1 + 2\sqrt{x+3} + x + 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} = -2$ (vô nghiệm)

Tập nghiệm của phương trình đã cho là $\varnothing$.

d) $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$, **ĐKXĐ** : $x \leq 3$

$$\Leftrightarrow 15 - x + 3 - x + 2\sqrt{(15-x)(3-x)} = 36$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(15-x)(3-x)} = 9 + x \qquad (*)$$

Với $9 + x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -9$ thì (*) $\Leftrightarrow x^2 - 18x + 45 = 81 + 18x + x^2$

$\Leftrightarrow -18x = 18 \Leftrightarrow x = -1 < 3$ (chấp nhận)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-1\}$.

120. ĐKXĐ : $\forall x$.

Ta có $\sqrt{|x|+1} > \sqrt{|x|}, \forall x$ nên ta xét phương trình $\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = a$ (*) trong các trường hợp sau

- Nếu $a \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm
- Nếu $a > 0$, thì (*) $\Leftrightarrow \sqrt{|x|+1} = a + \sqrt{|x|}$

Đặt $\sqrt{|x|} = y$ $(y \geq 0) \Rightarrow |x| = y^2$ (*) $\Rightarrow \sqrt{|x|+1} = \sqrt{y^2+1}$

Ta có phương trình :

$$\sqrt{y^2+1} = a + y \Leftrightarrow y^2 + 1 = a^2 + y^2 + 2ay \Leftrightarrow y = \frac{1-a^2}{2a}$$

(do hai vế đều dương)

* Với $0 < a \leq 1$ thì từ (*) suy ra phương trình có nghiệm

$$x = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} - a\right)^2, \; x = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} - a\right)^2$$

* Với $a > 1$, $y < 0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm

Tóm lại :

- Với $a \in (0 ; 1]$ thì tập nghiệm của phương trình là

$$\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} - a\right)^2 ; -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} - a\right)^2\right\}$$

- Với $a \in (-\infty ; 1) \cup (1 ; +\infty)$ tập nghiệm của phương trình là $\varnothing$.

121. Giải phương trình $x + \sqrt{4 - x^2} = 2 + 3x\sqrt{4 - x^2}$, ĐKXĐ : $-2 \leq x \leq 2$.

Đặt $x + \sqrt{4 - x^2} = z \Rightarrow z^2 = 4 + 2x\sqrt{4 - x^2} \Rightarrow 3x\sqrt{4 - x^2} = \frac{3}{2}\left(z^2 - 4\right)$.

Thay vào phương trình đã cho ta được :

$$z = 2 + \frac{3}{2}\left(z^2 - 4\right) \Leftrightarrow 3z^2 - 2z - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 \\ z = -\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

- Với $z = 2$ ta có :

$$x + \sqrt{4 - x^2} = 2 \; (1) \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = 2 - x \Rightarrow 4 - x^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{array}\right..$$

Thay vào (1) ta thấy cả $x_1 = 0, x_2 = 2$ đều thoả mãn

- Với $z = -\frac{4}{3}$ ta có

$$x + \sqrt{4 - x^2} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = -\frac{4}{3} - x \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 - x^2 = x^2 + \frac{16}{9} + \frac{8}{3}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9x^2 + 12x - 10 = 0 \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_3 = \dfrac{-2 - \sqrt{14}}{3} \\ x_4 = \dfrac{-2 + \sqrt{14}}{3} \end{array}\right.$$

Do phương trình (3) là phương trình hệ quả của (2), mà x_3, x_4 là nghiệm của (3) nên ta phải thử xem chúng có thoả mãn (2) hay không

Với $x_3 = -\frac{2 + \sqrt{14}}{3}$, ta được

$$VT = \sqrt{4 - \left(-\frac{2+\sqrt{14}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{18-4\sqrt{14}}{9}} = \frac{\sqrt{14}-2}{3}$$

$$VP = -\frac{4}{3} + \frac{2+\sqrt{14}}{3} = \frac{\sqrt{14}-2}{3}$$

VP = VT, vậy x_3 là một nghiệm của (2)

$$x_4 = \frac{-2+\sqrt{14}}{3}, \quad VT = \sqrt{4 - \left(\frac{-2+\sqrt{14}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{18+4\sqrt{14}}{9}} = \frac{\sqrt{14}+2}{3}$$

$VP = -\frac{4}{3} - \frac{-2+\sqrt{14}}{3} = \frac{-2-\sqrt{14}}{3} \neq$ VT (vậy x_4 không thoả mãn).

Do đó tập nghiệm của phương trình là $\left\{0\,;2\,;-\frac{2+\sqrt{14}}{3}\right\}$

122. Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 5$ (1)

ĐKXĐ : $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$

Đặt $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = t$ $(t \geq 0)$

$$\Rightarrow 5 + 2\sqrt{(x+1)(4-x)} = t^2 \Rightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)} = \frac{t^2-5}{2} \qquad (*)$$

Thay vào (1) ta có phương trình : $t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -5 \text{ (loại)} \\ t_2 = 3 \end{array}\right.$

Thay $t_2 = 3$ vào (*) ta được $\sqrt{(x+1)(4-x)} = \frac{9-5}{2}$ (**)

$$\sqrt{(x+1)(4-x)} = 2 \Rightarrow (x+1)(4-x) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy $x_1 = 0, x_2 = 3$ đều thoả mãn (*) và thoả mãn ĐKXĐ. Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{0\,;3\}$.

123. a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ 2x^2 - x(x+1) + 3(x+1)^2 - 7x - 12(x+1) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 & (1) \\ 2x^2 - 7x - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (2) ta được $x_1 = 4, x_2 = -\frac{1}{2}$ suy ra $y_1 = 5, y_2 = \frac{1}{2}$. Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(4 ; 5), \left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

b) **ĐS:** $\left(-\frac{4}{9} ; \frac{20}{9}\right)$; c) **ĐS**: $(0 ; 1)$ và $(1 ; 0)$; d) **ĐS**: $(2 ; 3)$ và $(3 ; 2)$.

124. a) Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 3 \\ (2y - 3)^2 - y + y^2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 3 \\ 5y^2 - 13y - 6 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = -3\frac{8}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

b) **ĐS** : $(0 ; 7), \left(\frac{5}{3} ; 2\right)$ c) **ĐS** : $(-1 ; 3), \left(\frac{71}{21} ; -\frac{50}{7}\right)$.

125. a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$, $S^2 - 4P = 25 - 24 > 0$, nên x, y là nghiệm của phương trình bậc 2

$$X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow X_1 = 3, X_2 = 2$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

(hay viết hệ phương trình có hai nghiệm là $(3 ; 2), (2 ; 3)$)

b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)\left[(x + y)^2 - 3xy\right] = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1(1 - 3xy) = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -2 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(-1 ; 2), (2 ; -1)$

c) Ta biết $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$$= x^4 + y^4 + 2xy\left[2(x + y)^2 - xy\right]$$

Cho nên hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^4 = 17 + 2xy(18 - xy) \\ x + y = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy = 16 \\ x + y = 3 \end{cases} \text{(vô nghiệm)} \\ \begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Chú ý : Ta có thể giải phương trình c) như sau

Đặt $xy = P$

$x + y = S = 3$, điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$ (*)

Ta có $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$$3^4 = 17 + 2xy\left(2x^2 + 3xy + 2xy\right)$$

$$81 = 17 + 2P\left[2(x + y)^2 - xy\right]$$

$$81 = 17 + 2P(18 - P) \Leftrightarrow 2P^2 - 36P + 81 - 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad P^2 - 18P + 32 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_1 = 16, P_2 = 2$$

$P_1 = 16$ không thoả mãn (*) nên bị loại, $P_2 = 2$ thoả mãn (*) nên chấp nhận.

Vậy phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

d) $\begin{cases} x + y + xy = -11 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases}$, Đặt $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ với điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} S + P = -11 \\ S^2 - P = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S + P = -11 \\ S^2 + S - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S + P = -11 \\ S = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} S + P = -11 \\ S = -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S = 1 \\ P = -12 \end{cases} \\ \begin{cases} S = -2 \\ P = -9 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hai hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -12 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -9 \end{cases}$$

Do đó hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = -3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = -1 + \sqrt{10} \\ y_3 = -1 - \sqrt{10} \end{cases}, \begin{cases} x_4 = -1 - \sqrt{10} \\ y_4 = -1 + \sqrt{10} \end{cases}$$

126. a) $$\begin{cases} x^2 + y + \frac{1}{4} = 0 \\ x + y^2 + \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y + \frac{1}{4} = 0 \\ (x - y)(1 + x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x^2 + y + \frac{1}{4} = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x^2 + y + \frac{1}{4} = 0 \\ 1 + x + y = 0 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1) ta có một nghiệm $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Giải (2) ta có hai nghiệm $\left(\frac{3}{2}; -2\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $\left(\frac{3}{2}; -2\frac{1}{2}\right)$ và một nghiệm kép $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

b) $\begin{cases} x + xy - y = 13 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + xy = 13 \\ xy(x - y) = 30 \end{cases}$

ĐS : Hệ có 4 nghiệm : $\left(\frac{17}{5}; \frac{6}{5}\right), \left(-\frac{13}{5}; -\frac{9}{5}\right), \left(\frac{14}{5}; \frac{12}{5}\right), \left(-\frac{16}{5}; -\frac{3}{5}\right)$.

d) $\begin{cases} 4x^2 + 2xy + 6x - 27 = 0 & (1) \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 & (2) \end{cases} \quad (I)$

Từ phương trình (2) của hệ I coi x là ẩn y là tham số

Ta có phương trình bậc hai đối với x, có $\Delta = (5y)^2 - 24y^2 = y^2$

Vậy ta có $x = \frac{5y + |y|}{2}$

$x = \frac{5y - |y|}{2}$

Với $y \geq 0$ hoặc $y < 0$ ta đều có $x = 3y, x = 2y$

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 4x^2 + 2xy + 6x - 27 = 0 \\ x = 3y \end{cases} & (II) \\ \begin{cases} 4x^2 + 2xy + 6x - 27 = 0 \\ x = 2y \end{cases} & (III) \end{array} \right.$$

Giải hệ (II) : $\begin{cases} 4(3y)^2 + 2.3y.y + 18y - 27 = 0 \\ x = 3y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 42y^2 + 18y - 27 = 0 \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-9 + 9\sqrt{15}}{14} \\ y = \dfrac{-9 + 9\sqrt{15}}{42} \end{cases}, \begin{cases} x = \dfrac{-9 - 9\sqrt{15}}{14} \\ y = \dfrac{-9 - 9\sqrt{15}}{42} \end{cases}$$

Giải hệ (III) : $\begin{cases} 4(2y)^2 + 2.2y.y + 12y - 27 = 0 \\ x = 2y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20y^2 + 12y - 27 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{5} \\ y = \dfrac{9}{10} \end{cases}, \begin{cases} x = -3 \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm :

$$\left(\frac{-9+9\sqrt{15}}{14};\frac{-9+9\sqrt{15}}{42}\right),\left(\frac{-9-9\sqrt{15}}{14};\frac{-9-9\sqrt{15}}{42}\right),\left(\frac{9}{5};\frac{9}{10}\right),\left(-3;-\frac{3}{2}\right)$$

127. a) $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=3\\(x+y)(x^2+y^2)=15\end{cases}$. ĐS : (1 ; 2), (2 ; 1)

b) $\begin{cases}x^2=3x+2y\\y^2=3y+2x\end{cases}$. ĐS : (0 ; 0), (5 ; 5), (–1 ; 2), (2 ; –1)

c) $\begin{cases}x^2-2xy+3y^2=9\\2x^2-13xy+15y^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-2xy+3y^2=9\\x=5y\end{cases}\\\begin{cases}x^2-2xy+3y^2=9\\x=2y\end{cases}\end{array}\right.$

Hệ đã cho có 4 nghiệm

$$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{-5\sqrt{2}}{2};\frac{-\sqrt{2}}{2}\right),\left(2\sqrt{3},\sqrt{3}\right),\left(-2\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$$

128. Đặt $u=\sqrt{x}$, $v=\sqrt{y}$, $u\geq 0$, $v\geq 0$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases}u+v=1\\u^3+v^3=1-3m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=1\\(u+v)\left[(u+v)^2-3uv\right]=1-3m\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=1\\1-3uv=1-3m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=1\\uv=m\end{cases}.$$

Vậy u, v là nghiệm của phương trình bậc hai : $X^2-X+m=0$ (*), với điều kiện $1-4m\geq 0$

Muốn phương trình đã cho có nghiệm thì phương trình (*) phải có hai nghiệm X không âm.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geq 0\\S\geq 0\\P\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-4m\geq 0\\\dfrac{-b}{a}=1>0\\P=\dfrac{c}{a}=m\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq m\leq\frac{1}{4}$$

129. a) Khi $m=2$, ta có hệ phương trình : $\begin{cases}x+y+3xy=16\\x^2+y^2=8\end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất (2 ; 2).

b) Đặt $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$, điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$ (**)

Khi đó hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} S + 3P = 4 + 6m \\ S^2 - 2P = 16 - 4m \end{cases} \text{(III)} \Leftrightarrow \begin{cases} S + 3P = 4 + 6m \\ 3S^2 + 2S - 56 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S + 3P = 4 + 6m \\ \left[\begin{array}{l} S_1 = 4 \\ S_2 = -\dfrac{14}{3} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S_1 = 4 \\ P_1 = 2m \end{cases} \\ \begin{cases} S_2 = -\dfrac{14}{3} \\ P_2 = 2m + \dfrac{26}{9} \end{cases} \end{array}\right.$$

Để hệ I có nghiệm (x ; y) để hệ (III) có nghiệm (S ; P) thoả mãn điều kiện

$$(**) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 16 - 8m \geq 0 \\ \dfrac{196}{9} - 4\left(2m + \dfrac{26}{9}\right) \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 2 \\ m \leq \dfrac{23}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq 2$$

Vậy với $m \leq 2$ thì hệ I có nghiệm.

130. a) $(a - 1)x + 2 = a + 1$

- Nếu $a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$, phương trình có dạng $0x + 2 = 2$. Vậy phương trình có vô số nghiệm.
- Nếu $a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a-1}{a-1} = 1$

b) $ax^2 + 2x + 1 = 0$

- Nếu $a = 0$, phương trình có dạng $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$
- Nếu $a \neq 0$, ta có $\Delta' = 1 - a$

* Nếu $\Delta' > 0 \Rightarrow 1 - a > 0 \Leftrightarrow a < 1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - a}}{a}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - a}}{a}$$

* Nếu $\Delta' > 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$ phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = -\frac{1}{a}$$

* Nếu $\Delta' < 0 \Rightarrow 1 - a < 0 \Leftrightarrow a > 1$, phương trình vô nghiệm

131. a) Với $a = -2$, phương trình (1) có dạng :

$$x^2 + 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3 + \sqrt{12}, x_2 = -3 - \sqrt{12}$$

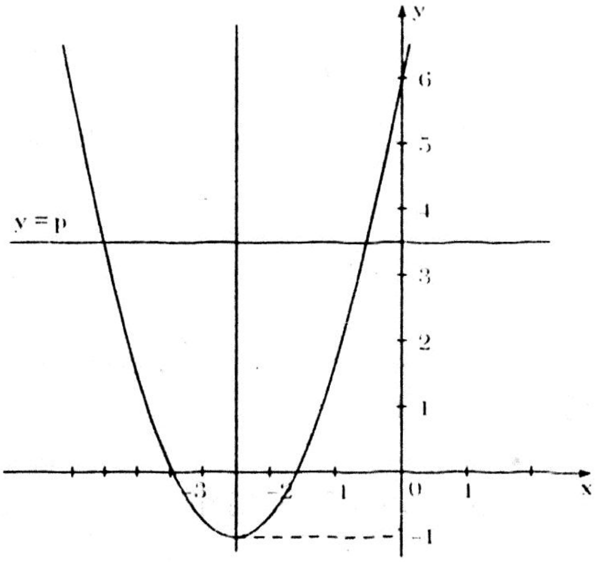
b) $x^2 - 2(a - 1)x + 2a + 1 = 0$ (1), $\Delta' = (a - 1)^2 - (2a + 1) = a^2 - 4a$

- Phương trình (1) có một nghiệm thì $\Delta' = 0 \Rightarrow a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = 0,\ a = 4$
- Hai nghiệm trái dấu thì $2a + 1 < 0,\ a < -\frac{1}{2}$
- Hai nghiệm cùng dấu thì

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 2a + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4a > 0 \Leftrightarrow a < 0 \text{ hoặc } a > 4 \\ 2a + 1 > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a > 4$$

- Hai nghiệm cùng dương $\begin{cases} a > 4 \\ a - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 4 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a > 4$

132. a) $x^2 + 5x = p - 6$ (*) $\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = p$



Hình 25

Vẽ trên cùng hệ toạ độ đồ thị của hai hàm số :

* $y = x^2 + 5x + 6$ (đường cong parabol).

* $y = p$ (đường thẳng song song với trục hoành).

Toạ độ giao điểm của hai đồ thị biểu diễn hai hàm số trên là nghiệm của phương trình (*) (h.25). Ta có :

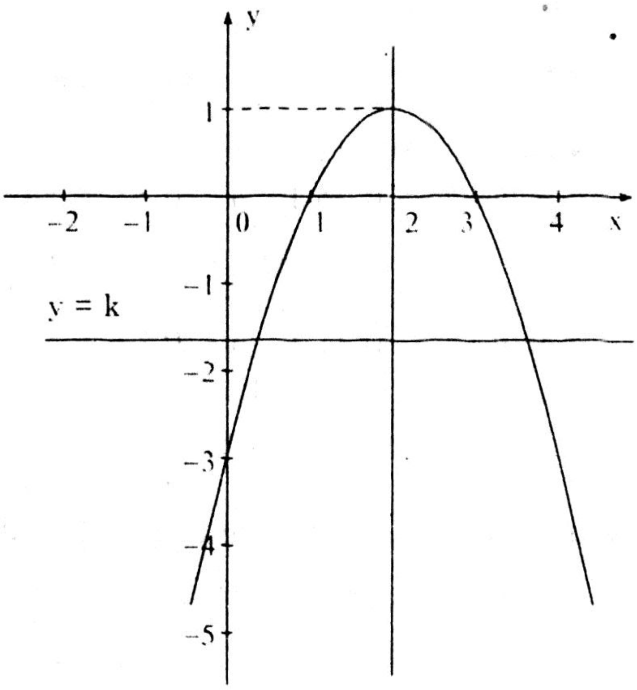
- Nếu $p < -1$, phương trình (*) vô nghiệm
- Nếu $p = -1$, phương trình (*) có nghiệm kép.
- Nếu $p > -1$ phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt

b) $-x^2 + 4x - 3 - k = 0$ (*)

$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = k$

Làm tương tự như câu a) ta có hình 26. Vậy :

- Nếu $k > 1$, phương trình vô nghiệm.
- Nếu $k = 1$, phương trình có nghiệm kép.
- Nếu $k < 1$, phương trình có hai nghiệm phân biệt.



Hình 26

133. $x^2 - 2x + a = 0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 1$ (*)

- $x_1 = 1 - \sqrt{1-a}$

  $x_2 = 1 + \sqrt{1-a}$

$$7x_2 - 4x_1 = 7 + 7\sqrt{1-a} - 4 + 4\sqrt{1-a} = 47$$

$\Leftrightarrow 11\sqrt{1-a} = 44 \Leftrightarrow \sqrt{1-a} = 4 \Leftrightarrow 1 - a = 16 \Leftrightarrow a = -15$ thoả (*) nên với $a = -15$ thì $7x_2 - 4x_1 = 47$.

- Với $x_1 = 1 + \sqrt{1-a}$

  $x_2 = 1 - \sqrt{1-a}$,

$$7x_2 - 4x_1 = 7 - 7\sqrt{1-a} - 4 - 4\sqrt{1-a} = 47$$

$\Leftrightarrow -11\sqrt{1-a} = 44 \Leftrightarrow \sqrt{1-a} = -4$ (phương trình này vô nghiệm vì vế trái là số dương, vế phải là số âm)

134. a) $\Delta = 9k^2 - 4k^2 = 5k^2 \geq 0\ \forall k$ nên phương trình luôn có nghiệm và theo hệ thức (V) ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3k \\ x_1x_2 = k^2 \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1{,}75$$

Vậy $(3k)^2 - 2k^2 = 1{,}75 \Leftrightarrow k^2 = 1{,}75 : 7 = 0{,}25 \Leftrightarrow k = \pm 0{,}5$

Với $k = \pm 0{,}5$ thì $x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75$.

b) Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình, ta có :

$$\begin{cases} x_0^2 + kx_0 + 1 = 0 \ (1) \\ x_0^2 + x_0 + k = 0 \ (2) \end{cases} \Leftrightarrow (k-1)x_0 = k - 1 \qquad (*)$$

- Với $k = 1$, phương trình (*) có dạng $0x_0 = -7$, vô nghiệm (loại)
- Với $k \neq 1$ (*) $\Leftrightarrow x_0 = \dfrac{k-1}{k-1} = 1$

Thay $x_0 = 1$ vào (1) ta có : $1 + k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -2$

Vậy với $k = -2$ hai phương trình đã cho có nghiệm chung $x = 1$.

135. a) $D = \begin{vmatrix} a & a-1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - a + 1 = a + 1$

- $Dx = \begin{vmatrix} 1+a & a-1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2a - a^2 + a = -a^2 + 3a + 2$

  $Dy = \begin{vmatrix} a & 1+a \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a - 1$

- Nếu $D \neq 0 \Rightarrow a + 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$ hệ có một nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} = \dfrac{-a^2 + 3a + 2}{a + 1} \\ y = \dfrac{Dy}{D} = \dfrac{a^2 - a - 1}{a + 1} \end{cases}$$

- Nếu $D = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1, Dx \neq 0, Dy \neq 0$. Vậy hệ vô nghiệm

b) $D = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 2 & m - 1 \end{vmatrix} = m^2 - m - 6 = (m - 3)(m + 2)$

$Dx = \begin{vmatrix} m + 1 & 3 \\ 3 & m - 1 \end{vmatrix} = m^2 - 10$; $Dy = \begin{vmatrix} m & m + 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = m - 2$

- Nếu $D \neq 0 \Rightarrow m \neq 3, m \neq -2$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} = \dfrac{m^2 - 10}{(m - 3)(m + 2)} \\ y = \dfrac{Dy}{D} = \dfrac{m - 2}{(m - 3)(m + 2)} \end{cases}$$

- Nếu $D = 0 \Rightarrow m = 3, m = -2$

* Với $m = 3$, Dx và Dy đều khác 0, nên hệ vô nghiệm

* Với $m = 2$, $Dy \neq 0$ nên hệ cũng vô nghiệm.

136. a) $x^2 - |x - 1| = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - x + 1 = 0, \text{ nếu } x \geq 1 & (1) \\ x^2 + x - 1 = 0, \text{ nếu } x < 1 & (2) \end{array}\right.$

- Phương trình (1) vô nghiệm
- Phương trình (2) có hai nghiệm $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $T = \left\{\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} ; \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right\}$

b) $|x^2 - x + 5| = x - x^2 - 5$. Muốn phương trình có nghiệm thì $-x^2 + x - 5 \geq 0$,

mà $-x^2 + x - 5 = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - 4\dfrac{3}{4} < 0 \ \forall x$

Vậy phương trình vô nghiệm, nên $T = \varnothing$

c) $3\left(2 + \sqrt{x - 2}\right) = 2x + \sqrt{x + 6}$ (1)

ĐKXĐ : $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$

(1) $\Leftrightarrow 6 - 2x = \sqrt{x + 6} + 3\sqrt{x - 2}$

$\Leftrightarrow 2(3 - x)\left(\sqrt{x + 6} + 3\sqrt{x - 2}\right) = x + 6 - 9(x - 2)$

$$\Leftrightarrow \quad 2(3-x)\left[\left(\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}\right)-4\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} 3-x=0 & (1) \\ \sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}=4 & (2) \end{array}\right.$$

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad x+6+9(x-2)+6\sqrt{(x+6)(x-2)}=16$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sqrt{x^2+4x-12}=14-5x$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 9\left(x^2+4x-12\right)=(14-5x)^2 \\ 14-5x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-11x+19=0 \\ x \leq \dfrac{14}{5} \end{cases} \quad (3)$$

Phương trình (3) có 2 nghiệm $x_1=\dfrac{11+3\sqrt{5}}{2}>\dfrac{14}{5}$ (loại)

$x_2=\dfrac{11-3\sqrt{5}}{2}$ (chấp nhận)

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $T=\left\{3\,;\dfrac{11-3\sqrt{5}}{2}\right\}$

d) $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=\dfrac{x+3}{5}$ (2)

ĐKXĐ : $x \geq \dfrac{2}{3}$

$$(2) \Leftrightarrow (x+3)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}\right)=5\underbrace{\left[4x+1-(3x-2)\right]}_{x+3}$$

$$\Leftrightarrow (x+3)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}-5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+3=0 & (1) \\ \sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}=5 & (2) \end{array}\right.$$

- Giải (1) : $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ (bị loại)
- Giải (2) : $\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}=5$ ta có nghiệm $x=2$.

$x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình này vì vế trái là một hàm đồng biến (với $x \geq \dfrac{2}{3}$).

Vậy $T=\{2\}$

Chú ý : Đôi khi từ việc tìm ĐKXĐ của phương trình vô tỉ cùng với một số nhận xét, ta tìm được ngay nghiệm của phương trình đã cho, hoặc làm cho việc giải phương trình dễ dàng hơn.

137. a $\begin{cases} x+y=2 \\ x^3+y^3=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ (x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2-xy=13 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(-1\,;3), (3\,;-1)$

b) $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 3(x + y) \\ x^3 - y^3 = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)\left(x^2 - xy + y^2 - 3\right) = 0 \\ (x - y)\left(x^2 + xy + y^2 - 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0, x = y = \pm\sqrt{3}, x = -y = \pm 1$$

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm.

138. Tìm tất cả các nghiệm dương $(x > 0, y > 0)$ của hệ $\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 50 \\ (x + y)(xy - 1) = 25 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x + y \ (u > 0) \\ v = xy - 1 \ (v > -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 50 \\ uv = 25 \end{cases} \Rightarrow (u + v)^2 = 100$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u + v = 10 \\ uv = 25 \end{cases} \\ \begin{cases} u + v = -10 \\ uv = 25 \end{cases} \text{(loại) vì } u + v = -10 < -1 \end{array} \right.$$

Vậy ta có $\begin{cases} u + v = 10 \\ uv = 25 \end{cases} \Rightarrow u = v = 5 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

139. Xét hệ phương trình $\begin{cases} xy + x^2 = b(y - 1) \\ xy + y^2 = b(x - 1) \end{cases}$ (1)

Nếu $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$ là một nghiệm thì $\begin{cases} x = y_0 \\ y = x_0 \end{cases}$ cũng là một nghiệm

Vậy muốn phương trình có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x = y$. Ta có phương trình $x^2 + x^2 = b(x - 1)$ có nghiệm duy nhất thì

$$\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 8b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 8 \end{array} \right.$$

- Thay $b = 0$ vào hệ (1) ta có : $xy + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x + y) = 0$ hệ có vô số nghiệm thoả mãn $x + y = 0$.
- Thay $b = 8$ vào hệ (1) ta có :

$$\begin{cases} xy + x^2 = 8(y - 1) \\ xy + y^2 = 8(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = 8(y - 1) \\ (x - y)(x + y + 8) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2 - 8x + 8 = 0 \\ x = y \end{cases} \quad (*) \\ \\ \begin{cases} x(-8 - x) + x^2 = 8(-9 - x) \\ y = -8 - x \end{cases} \quad (**) \end{array} \right.$$

Giải hệ (*) ta được nghiệm duy nhất $x = y = 2$

Hệ (**) vô nghiệm.

Do đó muốn hệ có nghiệm duy nhất thì $b = 8$

140. a) $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$ đúng với $\forall a\ ;\ b \in R$. Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$

b) $a^2 + b^2 \geq ab \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(a - \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4} \geq 0$ với $\forall a\ ;\ b \in R$.

Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = \dfrac{b}{2} = 0$.

c) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3 \Leftrightarrow a^4 - a^3b + b^4 - ab^3 \geq 0 \Leftrightarrow a^3(a - b) - b^3(a - b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(a^3 - b^3) \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0$ với $\forall a\ ;\ b$. Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$.

d) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 \geq 0$ với $\forall a\ ;\ b\ ;\ c$. Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

141. a) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$

$\Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) (c^2 - 2c + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0$ với $\forall a\ ;\ b\ ;\ c$. Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

b) $\dfrac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{4} - a(b - c) + b^2 + c^2 - 2bc \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - a(b - c) + (b - c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{2} - b + c\right)^2 \geq 0$ với $\forall a\ ;\ b\ ;\ c$.

Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = 2(b - c)$.

c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{4} - ab + b^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ac + c^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ad + d^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ae + e^2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 \geq 0$$

với $\forall$ a ; b ; c ; d ; e. Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = 2b = 2c = 2d = 2e$.

d) $4a^4 + 5a^2 \geq 8a^3 + 2a - 1 \Leftrightarrow 4a^4 - 8a^3 + 5a^2 - 2a + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow 4a^4 - 8a^3 + 4a^2 + a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 4a^2(a - 1)^2 + (a - 1)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 1)^2(4a^2 + 1) \geq 0$ với $\forall$a. Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = 1$.

142. HS tự làm.

143. a), b), c) HS tự làm.

d) $(a + 5)^4 + (a + 1)^4 \geq 32 \Leftrightarrow (a + 3 + 2)^4 + (a + 3 - 2)^4 \geq 32$

$\Leftrightarrow [(a + 3)^2 + 4(a + 3) + 4]^2 + [(a + 3)^2 - 4(a + 3) + 4]^2 \geq 32$

$\Leftrightarrow (a + 3)^4 + 16(a + 3)^2 + 16 + 8(a + 3)^3 + 8(a + 3)^2 + 32(a + 3) + (a + 3)^4 +$

$+ 16(a + 3)^2 + 16 - 8(a + 3)^3 + 8(a + 3)^2 - 32\,(a + b) - 32 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a + 3)^4 + 24(a + 3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a + 3)^2[(a + 3)^2 + 24] \geq 0$. Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = -3$

144. a) Với a ; b ; c > 0 ; $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow ac < bc \Leftrightarrow ab + ac < ab + bc$

$$\Leftrightarrow a(b + c) < b(a + c) \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + c}$$

b) Với a ; b ; c > 0 ; $\frac{a}{b} \geq 1 \Leftrightarrow a \geq b \Leftrightarrow ac \geq bc \Leftrightarrow ac + bc \geq ab + bc$

$$\Leftrightarrow a(b + c) \geq b(a + c) \Leftrightarrow \frac{a}{b} \geq \frac{a + c}{b + c}$$

c) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a - b)^2}{ab}\,\frac{\left(a^2 + ab + b^2\right)}{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a - b)^2}{(ab)^2}\left[\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right] \geq 0 \text{ với } \forall ab \neq 0.$$

Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$.

d) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2\ge 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)\ge 0$$

$\Leftrightarrow \dfrac{(a^2-ab+b^2)(a-b)^2}{(ab)^2}\ge 0$ với $\forall ab\ne 0$. Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$.

145. Với $a\,;\,b\,;\,c>0$

a) $\dfrac{1}{ab}\ge\dfrac{4}{(a+b)^2}\Leftrightarrow (a+b)^2\ge 4ab\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$. Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$.

b) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}\Leftrightarrow\dfrac{a+b}{ab}\ge\dfrac{4}{a+b}\Leftrightarrow (a+b)^2\ge 4ab\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$. Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$.

c) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)-9\ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}-6\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)\ge 0$$

$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)^2}{ac}+\frac{(b-c)^2}{bc}\ge 0.$$

Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$

146. Với $a\,;\,b\,;\,c>0$

a) $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\ge a+b+c$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{ab}{2c}+\frac{ca}{2b}-a\right)+\left(\frac{ab}{2c}+\frac{bc}{2a}-b\right)+\left(\frac{bc}{2a}+\frac{ac}{2b}-c\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)+\frac{c}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b-c)^2}{2bc}+\frac{b(a-c)^2}{2ac}+\frac{c(a-b)^2}{2ab}\ge 0.$$

Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$

b) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$. Áp dụng bài tập $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}$

ta có : $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \geq \dfrac{9}{2a+2b+2c}$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

Phần c) và d) áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{4}{a+b} \leq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ và bạn đọc tự chứng minh.

147. a), b) HS tự chứng minh.

c) $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \geq \dfrac{a+b+c}{2}$

Từ $\left(a - \dfrac{b+c}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - a(b+c) + \dfrac{(b+c)^2}{4} \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 \geq a(b+c) - \frac{(b+c)^2}{4} \text{ với } \forall a\ ;\ b\ ;\ c.$$

Với $b\ ;\ c > 0 \Rightarrow \dfrac{a^2}{b+c} \geq a - \dfrac{b+c}{4}$.

Tương tự ta có $\dfrac{b^2}{c+a} \geq b - \dfrac{c+a}{4}$; $\dfrac{c^2}{a+b} \geq c - \dfrac{a+b}{4}$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq (a+b+c) - \frac{2a+2b+2c}{2} \Rightarrow \text{(đpcm)}.$$

Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

d) $\dfrac{(a+b)^2}{c} + \dfrac{(b+c)^2}{a} + \dfrac{(c+a)^2}{b} \geq 4(a+b+c)$

Ta có : $(a+b-2c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 - 4c(a+b) + 4c^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4c(a+b) - 4c^2 \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{c} \geq 4(a+b-c) \text{ với } c > 0$$

Với $a\ ;\ b > 0$ tương tự ta có $\dfrac{(b+c)^2}{a} \geq 4(b+c-a)$; $\dfrac{(c+a)^2}{b} \geq 4(c+a-b)$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)^2}{c}+\frac{(b+c)^2}{a}+\frac{(c+a)^2}{b}\geq 4(a+b-c+b+c-a+a+c-b)$$

$\Rightarrow$ (đpcm). Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

148. a) $\dfrac{a+c}{a+b}+\dfrac{b+d}{b+c}+\dfrac{c+a}{c+d}+\dfrac{d+b}{d+a}\geq 4$

Áp dụng $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}\Rightarrow\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{c+d}\geq\dfrac{4}{a+b+c+d}$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{a+b}+\frac{c+a}{c+d}=(a+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}\right)\geq\frac{4(a+c)}{a+b+c+d}$$

Tương tự : $\dfrac{b+d}{b+c}+\dfrac{d+b}{d+a}=(b+d)\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{d+a}\right)\geq\dfrac{4(b+d)}{a+b+c+d}$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\geq\frac{4(a+c)}{a+b+c+d}+\frac{4(b+d)}{a+b+c+d}=4$$

Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

b) $\dfrac{a+c}{(a+b)(c+d)}+\dfrac{b+d}{(a+d)(b+c)}\geq\dfrac{4}{a+b+c+d}$

Áp dụng $\dfrac{1}{ab}\geq\dfrac{4}{(a+b)^2}$ với $a\,;\,b>0$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{(a+b)(c+d)}=(a+c)\frac{1}{(a+b)(c+d)}\geq(a+c)\frac{4}{(a+b+c+d)^2}$$

$$\frac{b+d}{(a+d)(b+c)}=(b+d)\frac{1}{(a+d)(b+c)}\geq(b+d)\frac{4}{(a+b+c+d)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{(a+b)(c+d)}+\frac{b+d}{(a+d)(b+c)}\geq\frac{4(a+c)+4(b+d)}{(a+b+c+d)^2}\Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

c) $\dfrac{3}{a+b}+\dfrac{2}{c+d}+\dfrac{a+b}{(a+c)(b+d)}\geq\dfrac{12}{a+b+c+d}$

Ta có :

$$\frac{3}{a+b}+\frac{2}{c+d}=\frac{3c+3d+2a+2b}{(a+b)(c+d)}\geq(3c+3d+2a+2b)\frac{4}{(a+b+c+d)^2}$$

$$\frac{a+b}{(a+c)(b+d)}\geq(a+b)\frac{4}{(a+b+c+d)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{a+b}+\frac{2}{c+d}+\frac{a+b}{(a+c)(b+d)}\geq\frac{3(a+b+c+d).4}{(a+b+c+d)^2}=\frac{12}{a+b+c+d}$$

Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

149. a) $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \ge 2 \Leftrightarrow a^2+2-2\sqrt{a^2+1} \ge 0 \Leftrightarrow a^2+1-2\sqrt{a^2+1}+1 \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+1}-1\right)^2 \ge 0$ với $\forall a$

b) $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1} \le ab \Leftrightarrow 2ab-2a\sqrt{b-1}-2b\sqrt{a-1} \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(ab-2a\sqrt{b-1}\right)+\left(ab-2b\sqrt{a-1}\right) \ge 0 \Leftrightarrow a\left(b-2\sqrt{b-1}\right)+b\left(a-2\sqrt{a-1}\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow a\left(b-1-2\sqrt{b-1}+1\right)+b\left(a-1-2\sqrt{a-1}+1\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow a\left(\sqrt{b-1}-1\right)^2+b\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2 \ge 0$.

Có đẳng thức khi và chỉ khi a = b = 1

c) $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$. Với a ; b > 0 $\Rightarrow a+b+2\sqrt{ab} > a+b \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} > 0$ đúng với $\forall a$; b > 0

d) $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b}$. Với a > b > 0 $\Rightarrow a+b-2\sqrt{ab} < a-b$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{b}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right) < 0$ đúng với $\forall a > b > 0$

150. a) $\sqrt{(a+c)(b+d)} \ge \sqrt{ab}+\sqrt{cd} \Leftrightarrow ab+ad+bc+cd \ge ab+cd+2\sqrt{abcd}$

$\Leftrightarrow ad+bc-2\sqrt{abcd} \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{ad}-\sqrt{bc}\right)^2 \ge 0$ đúng với $\forall a$; b ; c ; d > 0

b), c), d) HS tự chứng minh.

151. a) HS tự làm.

b) Ta có :

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}}{(k+1)k} = \sqrt{k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$= \left(1+\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \le 2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

Do đó $\dfrac{1}{2\sqrt{1}} \le 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\dfrac{1}{3\sqrt{2}} \le 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

....

$\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}} \le 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} \le 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < 2$$

152. a) Vì a ; b ; c là ba cạnh của Δ nên a + b − c > 0 ; a + c − b > 0 ; b + c − a > 0.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$$a = \frac{(a+b-c)+(a-b+c)}{2} \geq \sqrt{(a+b-c)(a-b+c)}$$

$$b = \frac{(b+a-c)+(b+c-a)}{2} \geq \sqrt{(b+a-c)(b+c-a)}$$

$$c = \frac{(c+a-b)+(c+b-a)}{2} \geq \sqrt{(c+a-b)(c+b-a)}$$

$\Rightarrow abc \geq (a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$

b) Từ $b + c > a \Rightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$

Tương tự ta có : $\frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}$; $\frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}$

$\Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$ (đpcm)

c), d) HS tự làm.

153. a) $|a| + |b| \geq |a+b| \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2|a||b| \geq a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow |a||b| \geq ab$ đúng với $\forall a$; b

$|a| + |b| \geq |a-b|$. Ta có : $|a| + |b| = |a| + |-b| \geq |a-b|$ (theo chứng minh trên)

b) $|a| - |b| \leq |a+b|$. Theo chứng minh trên ta có :

$|a+b| + |b| = |a+b| + |-b| \geq |a+b-b| = |a| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a+b|$ (đpcm)

$|a| - |b| \leq |a-b|$. Theo chứng minh trên ta có :

$|a-b| + |b| \geq |a-b+b| = |a| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a-b|$

c) $|a| + |b| + |c| \geq |a+b+c|$. Theo chứng minh trên ta có :

$|a| + |b| + |c| \geq |a+b| + |c| \geq |a+b+c|$ (đpcm)

d) $|a-b| + |b-c| \geq |a-c|$. Theo chứng minh trên ta có :

$|a-b| + |b-c| \geq |a-b+b-c| = |a-c|$ (đpcm)

154. a) $|x| + |y| + |x-3| + |y-5| \geq 8$

Ta có : $|x| + |y| + |x-3| + |y-5| = |x| + |y| + |3-x| + |5-y|$

$\Rightarrow |x| + |y| + |3-x| + |5-y| \geq |x+y+3-x+5-y| = 8 \Rightarrow$ (đpcm)

b) $\sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}} + \sqrt{a+15-8\sqrt{a-1}} \geq 2$. Với $a \geq 1$, ta có :

$\sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}} + \sqrt{a+15-8\sqrt{a-1}} = \sqrt{a-1-4\sqrt{a-1}+4} + \sqrt{a-1-8\sqrt{a-1}+16}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{a-1}-2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{a-1}-4\right)^2} = \left|\sqrt{a-1}-2\right| + \left|\sqrt{a-1}-4\right|$

$= \left|\sqrt{a-1}-2\right| + \left|4-\sqrt{a-1}\right| \geq \left|\sqrt{a-1}-2+4-\sqrt{a-1}\right| = 2 \Rightarrow$ (đpcm)

155. Từ $|a| < 1$; $|b-1| < 1999 \Rightarrow |a||b-1| = |ab-a| \leq 1999$; và $|a - c| < 1999$

$\Rightarrow |ab - a| + |a - c| \le 1999 + 1999 = 3998$

Mà $|ab - a| + |a - c| \ge |ab - a + a - c| = |ab - c| \Rightarrow |ab - c| \le 3998$ (đpcm)

156. a) $2|ax + by| \le a^2 + b^2 + x^2 + y^2$

$2|ax + by| \le 2|ax| + 2|by| \le a^2 + x^2 + b^2 + y^2 = a^2 + b^2 + x^2 + y^2$

b)**Từ** $|x| \ge 3 \Rightarrow \dfrac{1}{|x|} \le \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{|x|} + \dfrac{1}{|y|} + \dfrac{1}{|z|} \le 1$

Mà $\left|\dfrac{xy + xz + yz}{xyz}\right| = \left|\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right| \le \dfrac{1}{|x|} + \dfrac{1}{|y|} + \dfrac{1}{|z|} \le 1$ **(đpcm)**

Có đẳng **thức khi và chỉ khi** $|x| = |y| = |z| = 3$

157. a) $\left(1 + \sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)\left(1 + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right) \ge 4$

Theo bất đẳng thức Côsi : $1 + \sqrt{\dfrac{a}{b}} \ge 2\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}$; $1 + \sqrt{\dfrac{b}{a}} \ge 2\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}$

$\Rightarrow \left(1 + \sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)\left(1 + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right) \ge 4$ (đpcm)

b) $\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^n \ge 2^{n+1}$

$\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)^n \ge \left(2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^n$; $\left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^n \ge \left(2\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^n$

$\Rightarrow \left(1 + \dfrac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^n \ge 2^n\left[\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^n + \left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^n\right] \ge 2^{n+1}$ (đpcm)

c) $\dfrac{a + b}{2} + \dfrac{1}{4} \ge \dfrac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{a + b}$

$\dfrac{a + b}{2} \ge \sqrt{ab}$; $a + \dfrac{1}{4} \ge \sqrt{a}$; $b + \dfrac{1}{4} \ge \sqrt{b}$

$\Rightarrow \dfrac{a + b}{2}\left(a + b + \dfrac{1}{2}\right) \ge \sqrt{ab\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)} \Leftrightarrow \dfrac{(a + b)^2}{2} + \dfrac{a + b}{4} \ge a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a + b}{2} + \dfrac{1}{4} \ge \dfrac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{a + b}$ (đpcm)

d) $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Từ $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a \ge 2\sqrt{a}\sqrt{b}-\left(\sqrt{b}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} \ge 2\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Tương tự $\frac{b}{\sqrt{a}} \ge 2\sqrt{b}-\sqrt{a} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}$ với ∀a ; b > 0

c) $\frac{\sqrt{a}}{b}+\frac{\sqrt{b}}{a} > \frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}$

Theo Côsi : $\frac{\sqrt{a}}{b}+\frac{1}{\sqrt{a}} \ge 2\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{2}{\sqrt{b}}$; tương tự $\frac{\sqrt{b}}{a}+\frac{1}{\sqrt{b}} \ge \frac{2}{\sqrt{a}}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{b}+\frac{\sqrt{b}}{a} > \frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}$ (dpcm)

158. HS tự làm.

159. a) $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$. Theo Côsi ta có :

$a+(b+c) \ge 2\sqrt{a(b+c)} \Leftrightarrow \sqrt{a}(a+b+c) \ge 2a\sqrt{b+c} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \ge \frac{2a}{a+b+c}$

Tương tự ta có : $\sqrt{\frac{b}{c+a}} \ge \frac{2b}{a+b+c}$; $\sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge \frac{2c}{a+b+c}$

Cộng tổng 3 bất đẳng thức, ta có :

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

b) $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$.

c) $ac+\frac{b}{c} \ge 2\sqrt{ab}$, theo Côsi ta có : $ac+\frac{b}{c} \ge 2\sqrt{ac\frac{b}{c}} = 2\sqrt{ab}$

d) $\frac{a+bc^4}{2c^2} \ge \sqrt{ab}$, theo Côsi ta có :

$$\frac{a+bc^4}{2c^2} = \frac{a}{2c^2}+\frac{bc^4}{2c^2} \ge 2\sqrt{\frac{a}{2c^2}\frac{bc^4}{2c^2}} = \sqrt{ab}$$

e) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a} \ge 2b$, theo Côsi ta có : $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a} \ge 2\sqrt{\frac{ab}{c}\frac{bc}{a}} = 2b$

160. a) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+d}+\frac{1}{d+a} \ge \frac{8}{a+b+c+d}$

Áp dụng : $\frac{1}{A}+\frac{1}{B} \ge \frac{4}{AB}$ bạn sẽ chứng minh được.

b), c), d), e) HS tự làm.

161. a) Theo Côsi : $\dfrac{1}{x^n} + \dfrac{1}{y^n} \ge 2\sqrt{\dfrac{1}{x^n y^n}} = 2\dfrac{1}{\sqrt{(xy)^n}} \ge 2\dfrac{1}{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n} = \dfrac{2^{n+1}}{(x+y)^n}$

Với a, b, c là 3 cạnh của $\triangle ABC$ thì :

$a + b - c > 0$; $a + c - b > 0$; $b + c - a > 0$ nên ta có :

$$\frac{1}{(a+b-c)^n} + \frac{1}{(a+c-b)^n} \ge \frac{2^{n+1}}{(a+b-c+a+c-b)^n} = \frac{2^{n+1}}{(2a)^n} = \frac{2}{a^n}$$

Tương tự như trên ta có : $\dfrac{1}{(a+b-c)^n} + \dfrac{1}{(b+c-a)^n} \ge \dfrac{2}{b^n}$;

$$\frac{1}{(a+c-b)^n} + \frac{1}{(b+c-a)^n} \ge \frac{2}{c^n}$$

Cộng 2 vế ba bất đẳng thức trên ta có :

$$2\left[\frac{1}{(a+b-c)^n} + \frac{1}{(a+c-b)^n} + \frac{1}{(b+c-a)^n}\right] \ge 2\left(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n}\right)$$

dẫn đến điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

b) $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \le \sqrt{3}(a+b+c)$

Ta đã biết : $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \ge 2ab + 2bc + 2ca$

$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \ge a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$

Vậy $a + b + c \le \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$. Do đó :

$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} < \sqrt{a^2+b(a+c)} + \sqrt{b^2+c(a+b)} + \sqrt{c^2+a(b+c)}$

$\le \sqrt{3(a^2+bc+ba+b^2ca+cb+c^2+ab+ac)} \le \sqrt{3(a+b+c)^2} \le \sqrt{3}(a+b+c)$

c) Tương tự trên :

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \le \sqrt{3\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)} < \sqrt{3.2} = \sqrt{6}$$

d) $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a+b-c+b+c-a+c+a-b}$

$= \sqrt{3(a+b+c)}$

162. a) (Đề thi ĐH Ngoại thương năm 2001)

Từ giả thiết $x^2 + y^3 \ge x^3 + y^4 \Leftrightarrow x^2 + y^3 + y^2 \ge x^3 + y^4 + y^2$

Mà $y^4 + y^2 \ge 2y^4 + y^2 \ge 2\sqrt{y^4y^2} = 2y^3$ (Côsi)

Do đớ : $x^2 + y^2 + y^3 \ge x^3 + 2y^3 \Rightarrow x^3 + y^3 \le x^2 + y^2$

* Áp dụng BĐT Bunhia :

$$(x^2+y^2)^2 = \left(\sqrt{x}\sqrt{x^3} + \sqrt{y}\sqrt{y^3}\right)^2 \le (x+y)(x^3+y^3) \le (x+y)(x^2+y^2)$$

Vậy suy ra : $x^2 + y^3 \le x + y$

* Theo $(x+y)^2 \le 2\sqrt{x}(x^2 + y^2) \le 2(x+y) \Rightarrow x + y \le 2$

Vậy : $x^3 = y^3 \le x^2 + y^2 \le x + y \le 2$

b) $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$, chứng minh : $1 \le x, y, z \le \frac{7}{3}$

Ta có : $(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + yz + zx) \Leftrightarrow xy + xz + yz = 8$

dẫn đến : $\begin{cases} x + y = 5 - z \\ xy = 8 - z(5 - z) \end{cases}$

Vậy x, y là nghiệm của phương trình bậc hai : $T^2 - (5 - z) + 8 - z(5 - z) = 0$

PT này có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow (5 - z)^2 - 32 + 4z(5 - z) \ge 0$

$\Leftrightarrow -3z^2 + 10z - 7 \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le z \le \frac{7}{3}$

Vì x, y, z có vai trò như nhau nên $1 \le x, y, z \le \frac{7}{3}$

c) HS tự làm.

d) Giả sử cả 4 bất đẳng thức đều đúng, ta sẽ có :

$$2a(1-b)3b(1-c)8c(1-d)32d(1-a) > 1.\ 2.\ 1.\ 3$$

$$\Leftrightarrow \quad 256\, a(1-a)b(1-b)c(1-c)d(1-d) > 1$$

mà $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2 - a + \frac{1}{4} \ge 0 \Rightarrow a - a^2 \le \frac{1}{4} \Rightarrow a(1-a) \le \frac{1}{4}$

mà $a(1-a)b(1-b)c(1-c)d(1-d) \le \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} \le \frac{1}{256}$

Vậy $256\, a(1-a)b(1-b)c(1-c)d(1-d) \le 1$ nên VT > 1 là sai. Vậy hệ bất đẳng thức đã cho phải có ít nhất một bất đẳng thức sai.

Từ bài 163 – 170 HS tự làm.

171. a) $2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4} \Leftrightarrow 16 + 3x + 3 < 24 - 2x + 2 \Leftrightarrow 5x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{5}$

b) $\frac{6x}{2x+3} \ge \frac{3x-2}{x-1}$, điều kiện $x \ne 1$ và $x \ne -\frac{3}{2}$. **ĐS** : $x < -1$, $1 < x < 2$.

c) **ĐS** : $0 < x < 2$.

172. a) $\frac{m(x-2)}{3} - \frac{x+1}{3} > \frac{2(m-x)}{3} \Leftrightarrow mx - 2m - 3x - 3 > 2m - 2x$

$\Leftrightarrow (m - 1)x > 4m + 3$

* Nếu m = 1 ta có BPT $0.x > 7 \Rightarrow$ BPT vô nghiệm.

* Nếu m > 1 BPT có nghiệm $x > \frac{4m+3}{m-1}$

* Nếu m < 1 BPT có nghiệm $x < \frac{4m+3}{m-1}$

b) $\frac{m(x-2)}{6} - \frac{x-m}{3} < \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow mx - 2m - 2x + 2m < 3x + 3 \Leftrightarrow (m-5)x < 3$

* $m = 5$ BPT là $0.x < 3$ đúng $\forall x$

* $m > 5$ BPT có nghiệm là $x < \frac{3}{m-5}$

* $m < 5$ BPT có nghiệm là $x > \frac{3}{m-5}$

c) $\frac{ax}{a-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4} \Leftrightarrow 12ax - 4(a-2)(x-1) < 3(a-2)(2x+3)$ với điều kiện $a > 2$

$\Leftrightarrow 12ax - 4(a-2)x - 3(a-2)x < 9(a-2) - 4(a-2)$

$\Leftrightarrow (5a+14)x < 5a - 10$ vì $a > 2$ nên $5a + 14 > 0$ BPT có nghiệm

$$x < \frac{5a-10}{5a+14}$$

Với $a < 2$ BPT trở thành $(5a+14)x > 5a - 10$

* $a = -\frac{14}{5}$ BPT có nghiệm $0.x > -24$ đúng $\forall x$

* $a > -\frac{14}{5}$ BPT có nghiệm $x > \frac{5a-10}{5a+14}$

* $a < -\frac{14}{5}$ BPT có nghiệm $x < \frac{5a-10}{5a+14}$

Kết luận : $a > 2$ BPT có nghiệm $x < \frac{5a-10}{5a+14}$

$-\frac{14}{5} < a < 2$ BPT có nghiệm $x > \frac{5a-10}{5a+14}$

$a = -\frac{14}{5}$ .BPT đúng $\forall x$

$a < -\frac{14}{5}$ BPT có nghiệm $x < \frac{5a-10}{5a+14}$

173. a) $\frac{3x-4}{x+2} > 1$ (đk $x \neq -2$) $\Leftrightarrow \frac{-3x-4-x-2}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-6}{x+2} > 0$

$\Leftrightarrow (x-6)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x < -2$ hoặc $x > 6$

b) $\frac{2x-5}{x-2} \leq 1$ (đk $x \neq 2$) $\Leftrightarrow \frac{2x-5-x+2}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow 2 < x \leq 3$

c) $\frac{1}{x+1} \leq \frac{5}{2x+1}$ (đk $x \neq -1$) $\Leftrightarrow 2x + 1 \leq 5(x+1) \Leftrightarrow -3x \leq 4 \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{3}$

so sánh với điều kiện suy ra nghiệm của BPT là $-\frac{4}{3} \leq x < -1$ và $x > -1$

174. a) $|2x-5| < x+1$. Để có nghiệm thì $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$. Với đk đó :

$$|2x-5|<x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-5<x+1\\ x \geq \dfrac{5}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}5-2x<x+1\\ x<\dfrac{5}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<6\\ x \geq \dfrac{5}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x>\dfrac{4}{3}\\ -1<x<\dfrac{5}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{5}{2} \leq x<6\\ \dfrac{4}{3}<x<\dfrac{5}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{4}{3}<x<6$$

b) $|2x-1|>x$, với $x \leq 0$ BPT luôn thỏa mãn

Với $0<x \leq \frac{1}{2}$ BPT là $1-2x>x \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$ Vậy BPT có nghiệm $0<x<\frac{1}{3}$

Với $x>\frac{1}{2}$ BPT là $2x-1>x \Leftrightarrow x>1$

Kết hợp cả 3 trường hợp trên ta có nghiệm của BPT là $x<\frac{1}{3}$ hoặc $x>1$

c) $|x-2|>x+1$, với $x \leq -1$ thì $x+1 \leq 0<|x-2| \Rightarrow$ BPT có một phần nghiệm là $x \leq -1$

Với $-1<x \leq 2$ BPT trở thành $2-x>1+x$ Vậy BPT có nghiệm $-1<x \leq \frac{1}{2}$

Với $x>2$ BPT trở thành $x-2>x+1$ BPT vô nghiệm.

Kết hợp cả 3 trường hợp trên ta có nghiệm của BPT là $x<\frac{1}{2}$

d) $|x+2|>|x+1|$, bình phương 2 vế ta có BPT tương đương :

$$(x+2)^2>(x+1)^2 \Leftrightarrow 4x+4>2x+1 \Leftrightarrow x>-\frac{3}{2}$$

175. a) $\begin{cases}8x-5>\dfrac{15x-8}{2}\\ 2(2x-3)>5x-\dfrac{3}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}16x-10>15x-8\\ 16x-24>20x-3\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x>2\\ 4x<-21\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>2\\ x<-\dfrac{24}{4}\end{cases} \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm

b) $\begin{cases}\dfrac{4x-5}{7}<x+3\\ \dfrac{3x+8}{4}>2x-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x-5<7x+21\\ 3x+8>8x-20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x>-26\\ 5x<28\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-\dfrac{26}{3}\\ x<\dfrac{28}{5}\end{cases}$

$\Leftrightarrow -\frac{26}{3}<x<\frac{28}{5}$. Nghiệm nguyên là $\{-8,-7,-6,\ldots 3, 4, 5\}$, nghiệm nguyên lớn nhất là $x_{max}=5$.

c) $\begin{cases} 6x + \dfrac{5}{7} > 4x + 7 \\ \dfrac{8x + 3}{2} > 2x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 42x + 5 < 28x + 49 \\ 8x + 3 > 4x - 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x > 44 \\ 4x < 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{22}{7} \\ x < \dfrac{47}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{22}{7} < x < \dfrac{47}{4}$. Nghiệm nguyên là $\{3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11\}$.

nghiệm nguyên lớn nhất là $x_{max} = 11$.

d) $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \dfrac{1}{3} \\ 2(x - 4) < \dfrac{3x - 14}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 45x - 6 < 6x + 1 \\ 4x - 16 < 3x - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 39x > 7 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{7}{39} < x < 2$

Nghiệm nguyên bé nhất là $x_{min} = 1$.

176. $\begin{cases} x + 4m^2 \leq 2mx + 1 \\ 3x + 2 > 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - 2m)x \leq 1 - 4m^2 & (1) \\ x > -1 & (2) \end{cases}$

BPT thứ nhất có 3 khả năng

$*$ $m = \dfrac{1}{2}$ thì BPT đúng $\forall x$

$*$ $m > \dfrac{1}{2}$ thì $x \geq \dfrac{1 - 4m^2}{1 - 2m} = 1 + 2m$; $*$ $m < \dfrac{1}{2}$ thì $x \leq 1 + 2m$

Kết hợp với (2) ta có

$*$ $m = \dfrac{1}{2}$ BPT có nghiệm $x > -1$

$*$ $m > \dfrac{1}{2}$ BPT có nghiệm $x \geq 2$

$*$ $m < \dfrac{1}{2}$ thì $-1 < x \leq 2$

Vậy $\forall m$ hệ BPT luôn có nghiệm.

177. $\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x + 1} \geq x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x - 1} - 1 > \sqrt{x + 1}$ ⇔ BPT vô nghiệm vì :

$\sqrt{x - 1} < \sqrt{x + 1}$ nên $\sqrt{x - 1} - 1 < \sqrt{x + 1}$ với ĐKXĐ $x \geq 1$.

ĐKXĐ của BPT $x \geq 1$ là đúng.

178. a) $x + m + 1 > 2m(m - x) \Leftrightarrow (4 + 2m)x > 2m^2 - m - 1$

$*$ $m = -\dfrac{1}{2}$ BPT trở thành $0.x > 0 \Rightarrow$ BPT vô nghiệm

$*$ $m > -\dfrac{1}{2}$ BPT có nghiệm $x < \dfrac{2m^2 - m - 1}{1 + 2m} = \dfrac{(2m + 1)(m - 1)}{2m + 1} = m - 1$

$*$ $m < -\dfrac{1}{2}$ BPT có nghiệm $x < \dfrac{2m^2 - m - 1}{1 + 2m} = m - 1$

b) $m(x-4) < m^2 - 3(x-1) \Leftrightarrow (m+3)x < m^2 + 4m + 3$

* $m = -3$ BPT trở thành $0.x>0 \Rightarrow$ BPT vô nghiệm

* $m > -3$ BPT có nghiệm $x < \dfrac{m^2+4m+3}{m+3} = m+1$

* $m < -3$ BPT có nghiệm $x > m+1$

c) $|2x-1| = x + m \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+m \ge 0 \\ 2x-1 = x+m \\ x \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \\ 2x-1 = -x-m \\ x+m \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = m+1 \\ x \ge \dfrac{1}{2} \\ x+m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \ge 0 \\ m+1 \ge \dfrac{1}{2} \\ x = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m+1 \\ m \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1-m}{3} \\ x+m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1-m}{3} \\ \dfrac{1-m}{3} < \dfrac{1}{2} \\ m + \dfrac{1-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1-m}{3} \\ m \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy PT có nghiệm khi $m \ge -\dfrac{1}{2}$ và $x = m+1$; $x = \dfrac{1-m}{3}$

179. a) $A = \dfrac{2}{5-3x} - 3x = \dfrac{2}{5-3x} + 5 - 3x - 5 \ge 2\sqrt{\dfrac{2}{5-3x}(5-3x)} - 5 = 2\sqrt{2} - 5$

Vậy $A_{min} = 2\sqrt{2} - 5$ khi $\dfrac{2}{5-3x} = 5 - 3x \Leftrightarrow 5 - 3x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{5-\sqrt{2}}{3}$

b) $B = \dfrac{x^4 - 14x^2 + 4}{x^2} \Rightarrow x^2 + \dfrac{4}{x^2} - 14 \ge 2\sqrt{x^2\dfrac{4}{x^2}} - 14 = -10$

$B_{min} = -10$ **khi** $x^4 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

c) $C = \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{5}{x}$ với $0 < x < 1$

$C = \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{5(1-x)}{x} + 5 \ge 2\sqrt{\dfrac{x}{1-x}\dfrac{5(1-x)}{x}} + 5 = 2\sqrt{5} + 5$

$C_{min} = 2\sqrt{5} + 5$ khi $\dfrac{x}{1-1} = \dfrac{5(1-x)}{x} \Leftrightarrow x^2 = 5(1-x)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 10x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{5+\sqrt{5}}{4}$ (loại vì $x \in (0\,;1)$)

d) $D = 2(x^3 - 1) + \dfrac{3}{x^2}$ với $x \ge 0$

$D = x^3 + x^3 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} - 2 \ge 5\sqrt[5]{x^3.x^3.\dfrac{1}{x^2}.\dfrac{1}{x^2}.\dfrac{1}{x^2}} - 2 = 3$

$$D_{min} = 3 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^5 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

180. a) $A = \sqrt{-x^2 + 4x - 3} \geq 0$ ta có $A^2 = -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1$

$$= 1 - (x-2)^2 \leq 1.$$

Vậy $A_{min} = 0$ khi $x = 1$; $x = 3$. $A_{max} = 1$ khi $x = 2$.

b) $B = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ với $x \geq 1$

$$B = \sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}$$

$$= \left|\sqrt{x-1}+1\right| + \left|\sqrt{x-1}-1\right|$$

$$= \left|\sqrt{x-1}+1\right| + \left|1-\sqrt{x-1}\right| \geq \left|\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}\right| = 2$$

Vậy $B_{min} = 2$ khi $1 \leq x \leq 2$

c) Cho $x, y > 0$ và $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$, tìm GTNN của $C = x + y$

Xét $A = (\sqrt{3}+2)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{y}}\sqrt{y}\right) \leq \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^2\right]\left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2\right]$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{3}+2\right)^2 \leq \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{y}\right)(x+y) = x + y = C$$

Vậy $C \geq \left(2+\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow C_{min} = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 7 + 4\sqrt{3}$

khi $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{y}} \quad \Rightarrow \quad 2x = \sqrt{3}y \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{3} \\ y = 2\sqrt{3} + 4 \end{cases}$

181. $A_1 = (5x - 1)(x + 3)$, $A = 0 \Leftrightarrow x = -3$; $x = \frac{1}{5}$

$A > 0 \Leftrightarrow x < -3$; $x > \frac{1}{5}$; $\quad A < 0 \Leftrightarrow -3 < x < \frac{1}{5}$

A_2, A_3 HS tự làm.

182. $B_1 = \frac{(x-1)(2-5x)}{(x-1)(5x+1)}$, A không xác định $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$; $x \leq 1$

$A = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$; $\quad A > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} < x > \frac{2}{5}$

$A < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{5}$ hoặc $\frac{2}{5} < x \neq 1$

B_2, B_3 HS tự làm.

183. $C_1 = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{(x+2)(x-2)}$

KL : C_1 không xác định $\Leftrightarrow x = \pm 2$

$C_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$C_1 > 0 \Leftrightarrow -x < x < 0 \ ; \ x > 2$

$C_1 < 0 \Leftrightarrow < -2$ và $0 < x < 2$

$C_2 = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{4}{(x+2)(x-2)} = \frac{4}{x^2-4}$

C_2 không xác định $\Leftrightarrow x = \pm 2$

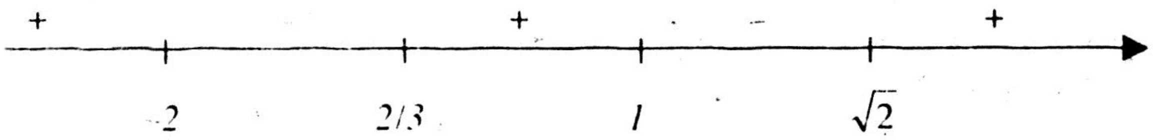
$C_2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ hoặc $x > 2$

$C_2 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

C_3 HS tự làm.

184. $D_1 = (x-1)(x+2)(3x-2)(x-\sqrt{2}) = 3(x-1)(x+2)(x-\sqrt{2})$

Xét dấu theo khoảng sau :



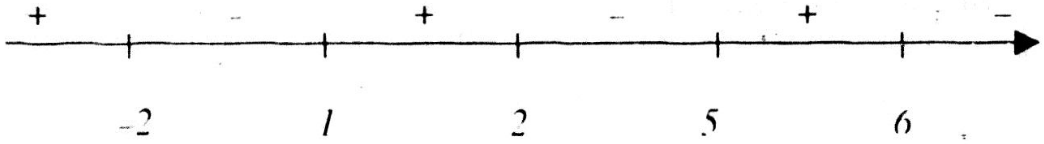
$D_1 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \ ; \ x = \frac{2}{3} \ ; \ x = 1 \ ; \ x = \sqrt{5}$

$D_1 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \ ; \ 1 < x < 2 \ ; \ 5 < x < 6$

$D_1 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < \frac{2}{3} ; \ 1 < x < \sqrt{2}$

$D_2 = (x-1)(x+2)(x-2)(x-5)(x-6)$

Xét dấu theo khoảng sau :



$D_2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \ ; \ x = 1 \ ; \ x = 2 \ ; \ x = 5 \ ; \ x = 6$

$D_2 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \ ; \ 1 < x < 2 \ ; \ 5 < x < 6$

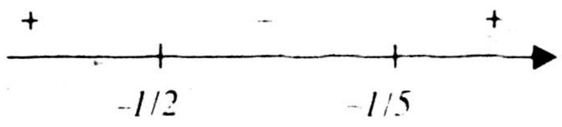
$D_2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1 \ ; \ 2 < x < 5 \ ; \ x > 6$

185. a) $\frac{1-4x}{1+2x} > 3$ (*) điều kiện $x \neq -\frac{1}{2}$. Từ (*) $\Leftrightarrow \frac{1-4x-3-6x}{1+2x} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{-2-10x}{1+2x} > 0 \Leftrightarrow \frac{10x+2}{1+2x} < 0 \Leftrightarrow (10x+2)(2x+1) < 0$

$\Leftrightarrow 20\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) < 0$

Xét dấu vế trái

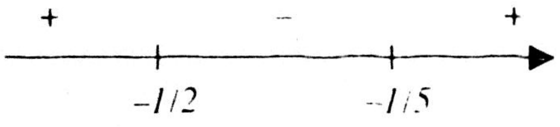


BPT có nghiệm $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{5}$

b) $\frac{1-4x}{1+2x} \le -3 \Leftrightarrow \frac{1-4x+3+6x}{1+2x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{4+2x}{1+2x} \le 0$ điều kiện $x \ne -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right) \le 0 \\ x \ne \frac{1}{2} \end{cases}$$

Xét dấu vế trái



BPT có nghiệm $-2 \le x < -\frac{1}{2}$

186. a) $|x+3| + |2x-4| < 5$ (*)

Với $x \le -3$ thì (*) $\Leftrightarrow -x-3-2x+4 < 5 \Leftrightarrow x < \frac{4}{3} \Rightarrow$ BPT vô nghiệm

Với $-3 < x \le 2$ (*) $\Leftrightarrow x+3-2x+4 < 5 \Leftrightarrow -x < -2 \Leftrightarrow x > 2 \Rightarrow$ BPT vô nghiệm

Với $x > 2$ (*) $\Leftrightarrow x+3+2x-4 < 5 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow$ BPT vô nghiệm

KL : BPT vô nghiệm ∀x

b) $|3x+5| > 2$ (*)

Với $x \le -\frac{5}{3}$ (*) $\Leftrightarrow -3x-5 > 2 \Leftrightarrow 3x < -7 \Leftrightarrow x < -\frac{7}{3}$

Với $x > -\frac{5}{3}$ (*) $\Leftrightarrow 3x+5 > 2 \Leftrightarrow 3x > -3 \Leftrightarrow x > -1$

Vậy BPT có 2 khoảng nghiệm : $x < -\frac{7}{3}$ và $x > -1$

187. a) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \le 3 \Leftrightarrow |x+2| \le 3|x-1|$

Với $x \le -2$ BPT $\Leftrightarrow -x-2 \le 3(1-x) \Leftrightarrow 2x \le 5 \Leftrightarrow x \le \frac{5}{2}$

Với $-2 < x \le 1$ BPT $\Leftrightarrow x+2 \le 3(1-x) \Leftrightarrow 4x \le 1 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{4}$

Với $x > 1$ BPT $\Leftrightarrow x+2 \le 3x-3) \Leftrightarrow 2x \ge 5 \Leftrightarrow x \ge \frac{5}{2}$

Vậy BPT có nghiệm $x \le -2$; $-2 < x \le \frac{1}{4}$; $x \ge \frac{5}{2}$ hay $x \le \frac{1}{4}$; $x \ge \frac{5}{2}$

b) $2x(x-1) + 3x \ge 2x^2 - x + 3 \Leftrightarrow x \ge -x + 3 \Leftrightarrow x \ge \frac{3}{2}$

c) $(3x-1)^2-(x+5)\le 9x^2+x \Leftrightarrow -6x+1-x-5\le 0$

$\Leftrightarrow -7x\le 4 \Leftrightarrow 7x\ge -4 \Leftrightarrow x\ge -\frac{7}{4}$

188. a) Xét dấu $A=m^2x-2$

* $m=0 \Leftrightarrow A=-2 \quad A<0\ \forall x$

* $m\ne 0 \Leftrightarrow A=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{m^2}$

$A>0 \Leftrightarrow x>\frac{2}{m^2}$; $A<0 \Leftrightarrow x<\frac{2}{m^2}$

b) Xét dấu $B=(m-1)x+2m$

* $m=1$: $B=2\ \forall x$

* $m>1$: $B>0 \Leftrightarrow x>-\frac{2m}{m-1}$; $B<0 \Leftrightarrow x<-\frac{2m}{m-1}$

* $m<1$: $B>0 \Leftrightarrow x<-\frac{2m}{m-1}$; $B<0 \Leftrightarrow x>-\frac{2m}{m-1}$

; $B=0 \Leftrightarrow x=m=0$

c) Xét dấu $C=(x-1)(x-m)$

* $m=1$: $C=(x-1)^2\ge 0\ \forall x$

* $m>1$: $C=0 \Leftrightarrow x=1$, $x=m$; $C>0 \Leftrightarrow x<1$, $x>m$

; $C<0 \Leftrightarrow 1<x<m$

* $m<1$: $C=0 \Leftrightarrow x=1$, $x=m$; $C>0 \Leftrightarrow x<m$; $x>1$

; $C<0 \Leftrightarrow m<x<1$

189. a) $A=\frac{1}{x-m}-\frac{1}{x-2}=\frac{m-2}{(x-m)(x-2)}$, ĐK : $x\ne m$; $x\ne 2$

* $m=2$ thì $A=0\ \forall x\ne m$ và $x\ne 2$

* $m>2$ thì $A>0 \Leftrightarrow x<2$; $x>m$; $A<0 \Leftrightarrow 2<x<m$

* $m<2$ thì $A>0 \Leftrightarrow m<x<2$; $A<0 \Leftrightarrow x<m$; $x>2$

b) $B=\frac{x+3}{(x+m)(x-2)}$, ĐK : $x\ne -m$; $x\ne 2$

* $m>3$ thì $-m<-3<2$: $B<0 \Leftrightarrow x<-m$; $-3<x<2$

$B>0 \Leftrightarrow m<x<-3$; $x>2$

* $-2<m<3$ thì $-3<m<2$: $B<0 \Leftrightarrow x<-3$; $-m<x<2$

$B>0 \Leftrightarrow -3<x<-m$; $x>2$

* $m<-2$ thì $-3<x<-m$: $B<0 \Leftrightarrow x<-3$; $2<x<-m$

$B>0 \Leftrightarrow -3<x<2$; $x>-m$

190. HS tự giải.

191. a) $y\le 3$

Miền nghiệm là phần mặt phẳng phía dưới đường thẳng $y=3$ (kể cả đường thẳng) (h. 27a)

b) $x\ge 5$

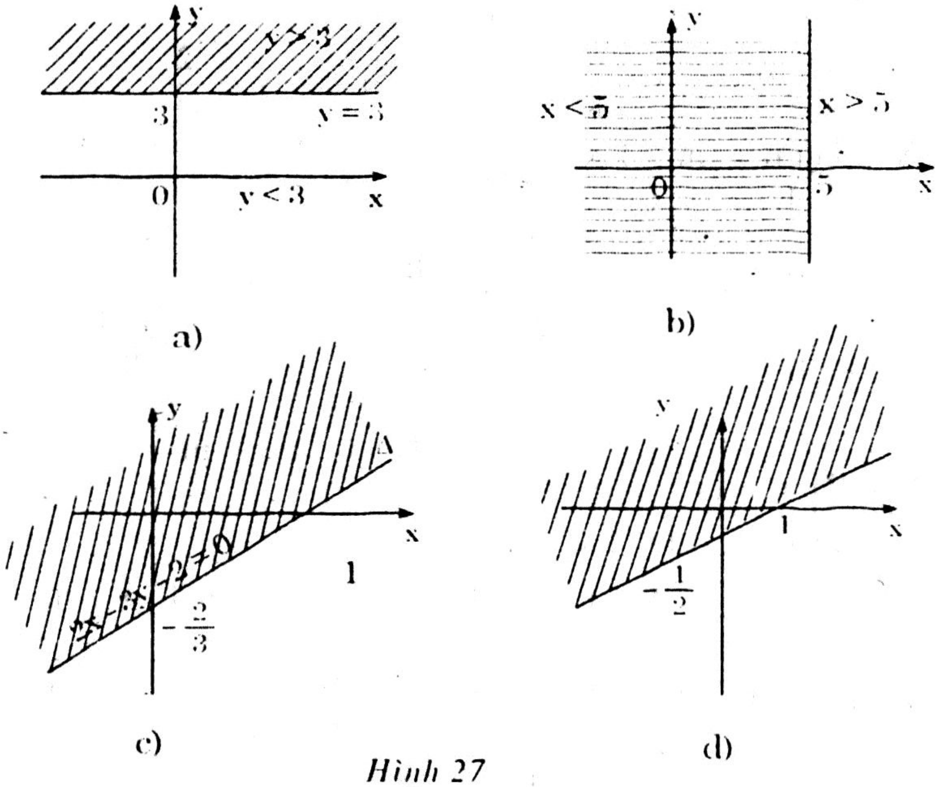
Miền nghiệm là phần mặt phẳng bên phải đường thẳng $x = 5$ (kể cả đường thẳng) (h. 27b)

c) $3(x - y + 1) > x + 5 \Leftrightarrow 2x - 3y - 2 > 0$

Miền nghiệm là phần mặt phẳng phía dưới đường thẳng $\Delta : 2x - 3y - 2 = 0$ (h. 27c)

d) $2(x + y) \leq 3(x - 1) + 2 \Leftrightarrow x - 2y - 1 \geq 0$

Miền nghiệm là phần mặt phẳng phía dưới đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ (h.27d)


y
y > 3
3
y = 3
0
y < 3
x
y
x < 5
x > 5
0
5
x
y
Δ
x
2x − 3y − 2 = 0
1
$-\frac{2}{3}$
y
1
x
$-\frac{1}{2}$

a) b) c) d)

Hình 27

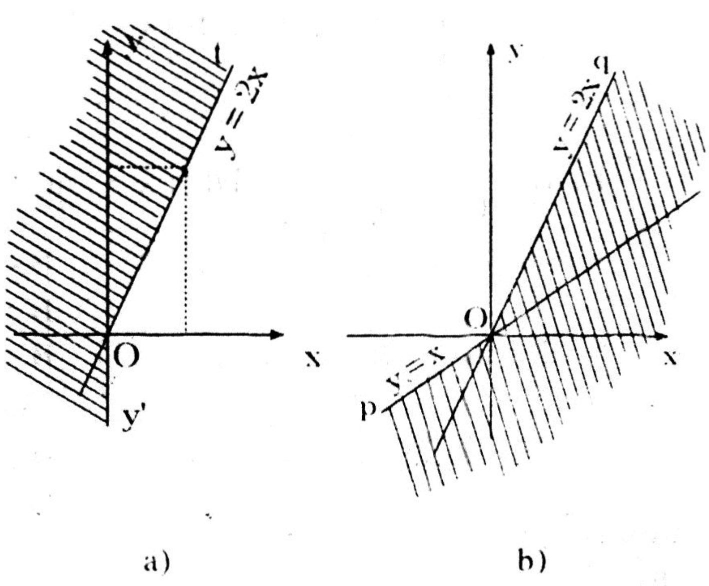
192. a) $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Miền nghiệm là phần mặt phẳng nằm trong góc $\widehat{y'Ot}$ kể cả hai tia Ot và Oy'.

b) $\begin{cases} 2x - y \leq 0 \\ y \geq x \end{cases}$

Miền nghiệm là phần mặt phẳng nằm trong góc $\widehat{pOq}$ kể cả hai tia Op và Oq.

c) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 1 \\ y - 3x \geq 0 \end{cases}$


y
t
y = 2x
O
x
y'
y
q
y = 2x
O
x
y = x
p

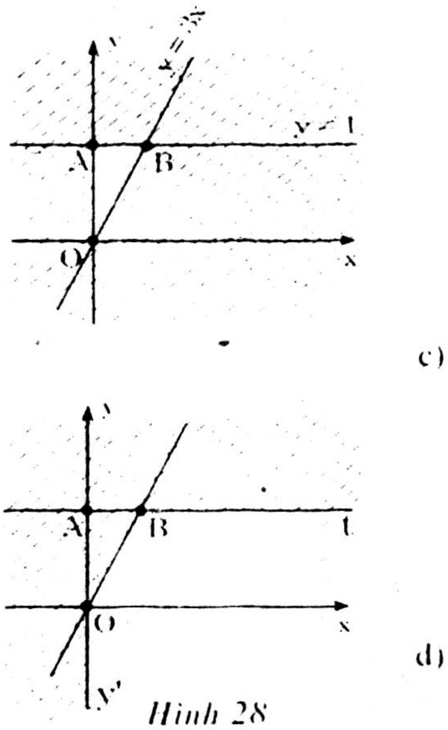
a) b)

Hình 28

Miền nghiệm là phần mặt phẳng của tam giác OAB kể cả chu vi tam giác.

d) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 1 \\ y - 3x \leq 0 \end{cases}$

Miền nghiệm (hình 28d) là các điểm $(x,y) \in$ đoạn OB, tia Bt và tia Oy'.



Hình 28

193. a) HS tự làm

b) $\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y < -3 \\ x + y > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y + 3 < 0 \\ x + y - 5 > 0 \end{cases}$

(HS tự vẽ hình)

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - 1 \geq 0 \\ 2(x - 1) + \dfrac{3y}{2} \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 6 \geq 0 \\ 4x + 3y - 12 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ (HS tự vẽ hình)

d) $\begin{cases} -2x + y \leq -2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 2 \geq 0 \\ x - 2y - 2 \leq 0 \\ x + y - 5 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ (HS tự vẽ hình)

Miền nghiệm là ΔABC chỉ kể cạnh AB và BC với $A(\frac{7}{3}, \frac{8}{3})$; $B(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3})$; $C(4,1)$.

194. a) $a(x + 4) > 3ax + 2 \Leftrightarrow 2ax < 4a - 2$.

- $a = 0$ thì bất phương trình là : $0.x < -2$ vô nghiệm.
- $a > 0$ bất phương trình có nghiệm : $x < \dfrac{4a - 2}{2a} = 2 - \dfrac{1}{a}$.
- $a < 0$ bất phương trình có nghiệm : $x > 2 - \dfrac{1}{a}$.

b) $ax + 1 \leq 2x + a \Leftrightarrow (a - 2)x \leq a - 1$.

- $a = 2$ bất phương trình là : $0.x \leq 1$ đúng với $\forall$ x.

- $a > 2$ bất phương trình có nghiệm : $x \le \frac{a-1}{a-2}$.
- $a < 0$ bất phương trình có nghiệm : $x \ge \frac{a-1}{a-2}$.

c) $(1-a)^2x > 1-2ax \Leftrightarrow (1+a^2)x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{1+a^2}$ đúng với ∀ a.

d) $\frac{ax+1}{a-1} > \frac{ax-1}{a+1} \Leftrightarrow \frac{ax+1}{a-1} - \frac{ax-1}{a+1} > 0$ với $\forall a \ne \pm 1$.

$\Leftrightarrow \frac{2(a+1)x}{a^2-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{a-1} > 0$

- $a > 1$ bất phương trình có nghiệm $x > 0$.
- $-1 < a < 1$ bất phương trình có nghiệm $x < 0$.
- $a = \pm 1$ bất phương trình không tồn tại.

195. HS tự làm.

196. HS tự làm.

197. a) $\begin{cases} 3x+1 \ge 2x+7 \\ 4x+3 < 2x+19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 6 \\ 2x < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 6 \\ x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow 6 \le x < 8$

b) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6} \\ \frac{3x+5}{4} - 1 \le \frac{x-2}{3} + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 < x + 12 \text{ đúng } \forall x \\ 9x + 3 < 16x - 8 \Leftrightarrow 7x > 11 \Leftrightarrow x > \frac{11}{7} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+3 < 4+2x \\ 5x-3 < 4x-1 \\ x \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 2 \\ x \in Z \end{cases} \Leftrightarrow x = 0; \quad x = 1$

KL : a > 1 BPT có nghiệm $\frac{-1}{a-1} < x < 1$; a = 1 BPT đúng $\forall x \in R$ với $x \ne 1$

$0 < a < 1$ BPT có nghiệm $x > \frac{-1}{a-1}$; $x < 1$; a = 0 BPT đúng $\forall x \in R$ với

$x \ne 1$; $a < 0$ BPT có nghiệm $x < \frac{-1}{a-1}$; $x > 1$

d) $\sqrt{x-1}\left(x-a+2\right) > 0$

$\begin{cases} x > 1 \\ x - a + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > a - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \text{ BPT có nghiệm } x > 1 \\ a > 3 \text{ BPT có nghiệm } x > a - 2 \\ a < 3 \text{ BPT có nghiệm } x > 1 \end{array}\right.$

KL : $\left[\begin{array}{l} a \le 3 \text{ BPT có nghiệm } x > 1 \\ a > 3 \text{ BPT có nghiệm } x > a - 2 \end{array}\right.$

198. $\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-2}\le 0\\ 4x+1\le a\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases}x-1\ge 0\\ x-2\le 0\\ x\le\dfrac{a-1}{4}\end{cases}\right. \text{ hoặc } \left[\begin{cases}x-1\le 0\\ x-2\ge 0\\ x\le\dfrac{a-1}{4}\end{cases}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases}x\ge 1\\ x\le 2\\ x\le\dfrac{a-1}{4}\end{cases}\right. \text{ hoặc } \left[\begin{cases}x\le 1\\ x\ge 2\\ x\le\dfrac{a-1}{4}\end{cases}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}1\le x\le 2\\ x\le\dfrac{a-1}{4}\end{cases}.$$

a) Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{a-1}{4} < 1 \Leftrightarrow a < 5$

b) Hệ có nghiệm duy nhất khi $\dfrac{a-1}{4} = 1 \Leftrightarrow a = 5$

199. a) $x + m + 1 > 2m(m - x) \quad \Leftrightarrow (1 + 2m)x > 2m^2 - m - 1 = (m - 1)(2m + 1)$

* $m = -\dfrac{1}{2}$, BPT trở thành $0.x < 0 \Rightarrow$ BPT vô nghiệm

* $m > -\dfrac{1}{2}$, BPT có nghiệm $x > m - 1$

* $m < -\dfrac{1}{2}$, BPT có nghiệm $x < m - 1$

b) $m(x - 4) < m^2 - 3(x - 1) \Leftrightarrow (m + 3)x < m^2 + 4m + 3$

$\Leftrightarrow (m + 3) < (m + 1)(m + 3)$

* $m = -3$, BPT trở thành $0.x < 0 \Rightarrow$ BPT vô nghiệm

* $m < -3$, BPT có nghiệm $x > m + 1$

* $m > -3$, BPT có nghiệm $x < m + 1$

c) $|2x - 5| \ge x + 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge \dfrac{5}{2}\\ 2x - 5 \ge x + 2\end{cases}\\ \begin{cases}x < \dfrac{5}{2}\\ 5 - 2x \ge x + 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge \dfrac{5}{2}\\ x \ge 7\end{cases}\\ \begin{cases}x < \dfrac{5}{2}\\ 3x \le 3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \ge 7\\ x \le 1\end{array}\right.$$

d) $|3x + 2| \ge |2 - x| \Leftrightarrow (3x + 2)^2 \ge (2 - x)^2$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 10x + 4 \ge 4 - 4x + x^2 \Leftrightarrow 8x^2 + 16x \ge 0 \Leftrightarrow 8x(x + 2) \ge 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le 0\\ x + 2 \le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x \ge 0\\ x + 2 \ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \le -2\\ x \ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x \le 2 \text{ hoặc } x \ge 0$$

200. a) $$\begin{cases} 5x + 2 \geq \dfrac{4x+5}{2} \\ \dfrac{2x+3}{3} \leq 4x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 4 \geq 4x + 5 \\ 2x + 3 \leq 12x + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x \geq 1 \\ 10x \geq -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{6} \\ x \geq \dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{6}$$

b) $$\begin{cases} x + 3 \geq 5 - \dfrac{x+2}{3} \\ \dfrac{2x+1}{3} + \dfrac{3x-2}{4} < \dfrac{x-1}{6} + \dfrac{3x-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 9 \geq 15 - x - 2 \\ 8x + 4 + 9x - 6 < 2x - 2 + 12x - 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x > 4 \\ 3x < -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \dfrac{-8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \text{hệ vô nghiệm}$$

201. a) $f_1 = x^2 + x + 1$ có $\Delta = -3 < 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 > 0 \ \forall x \in R$

b) $f_2 = x^2 + 2x + 3$ có $\Delta' = -2 < 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 > 0 \ \forall x \in R$

c) $f_3 = -x^2 + 3x - 2$ có $\Delta = 1 > 0 \Rightarrow$ tam thức có 2 nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

202 đến **205** HS tự làm.

206. d) $f(x) = (ax + b)^2$ khi $\Delta = 0$ (vì hệ số x^2 đã dương)

Vậy $a = \pm 3$; khi đó $x^2 - 2ax + 9 = x^2 \pm 6x + 9 = (x \pm 3)^2$

207. a) $x^2 - 2(a - 1)x + a - 3 = 0$

$\Delta' = (a - 1)^2 - (a - 3) = a^2 - 3a + 4$

Tam thức $a^2 - 3a + 4$ có $\delta = 9 - 16 = -7 < 0$ nên $a^2 - 3a + 4 > 0$ với $\forall a$.

Vì $\Delta' > 0$ với $\forall a$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm

b) $(a + 1)x^2 - (3a - 2)x + 2a - 3 = 0$

Nếu $a = -1$ phương trình trở thành $5x - 5 = 0$ có nghiệm $x = 1$

Nếu $a \neq -1$ phương trình là bậc 2 có $\Delta = (3a - 2)^2 - 4(a + 1)(2a - 3)$

$\Leftrightarrow \Delta = 9a^2 - 12a + 4 - 8a^2 + 4a + 12 = a^2 - 8a + 16 = (a - 4)^2 \geq 0$ với $\forall a$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm

208 đến **210**. HS tự làm.

211. $f(x) = ax^2 - (a - 3)x + 1$ là bình phương nhị thức $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

$\Delta = (a - 3)^2 - 4a = a^2 - 10a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ và $a = 9$ thỏa mãn $a > 0$

Với $a = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

Với $a = 9 \Rightarrow f(x) = 9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$

212. HS tự làm.

213. a) $15x^2 - 7x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{5}$; $x \geq \frac{2}{3}$

b) $(x - 1)(x + 2) \geq 3(x^2 - 1) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geq 3x^2 - 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow 2(x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$

c) $x^2 - (1 + \sqrt{5})x + \sqrt{5} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$; $x \geq \sqrt{5}$

d) $(x - 1)(x + 3) \geq (x - 1)(x + 2) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x \geq 1$

214. a) $x^2 - mx + m - 3 \geq 0$

$\Delta = m^2 - 4m + 12 = (m - 2)^2 + 8 > 0$ với $\forall m$

Tam thức vế trái luôn có 2 nghiệm $x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4m + 12}}{2}$

Vậy bất phương trình luôn có nghiệm $x < \frac{m - \sqrt{m^2 - 4m + 12}}{2}$

$x > \frac{m + \sqrt{m^2 - 4m + 12}}{2}$

b) $mx^2 - 2x + 4 \geq 0$

$m = 0$ bất phương trình có nghiệm $x \leq 2$

$m \neq 0 \Rightarrow \Delta' = 1 - 4m$

nếu $m \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta' \leq 0 \Rightarrow$ bất phương trình luôn được thỏa mãn với $\forall x$

nếu $0 < m < \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta' > 0$ và $a > 0 \Rightarrow$ bất phương trình có nghiệm :

$x < \frac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{m}$; $x > \frac{1 + \sqrt{1 - 4m}}{m}$

nếu $m < 0 \Rightarrow \Delta' > 0$ và $a < 0 \Rightarrow$ bất phương trình có nghiệm :

$\frac{1 + \sqrt{1 - 4m}}{m} < x < \frac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{m}$

c) $(m + 1)x^2 - 2mx + 2m \leq 0$

$m = -1$ bất phương trình trở thành $2x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$

$m \neq -1$ ta có $\Delta' = m^2 - 2m(m + 1) = -m^2 - 2m = -m(m + 2)$

m	*a*	*Δ'*	*Kết luận về nghiệm bất phương trình*
$-\infty$			
	−	−	*bất phương trình đúng với* $\forall x$
−2		0	*bất phương trình đúng với* $\forall x \in R$
	−	+	*bất phương trình có nghiệm* $x \leq x_1$; $x \geq x_2$
−1	0		*bất phương trình có nghiệm* $x \leq 1$
	+	+	*bất phương trình có nghiệm* $x_1 \leq x \leq x_2$
0		0	*bất phương trình có nghiệm* $x = 0$

$+\infty$	+	–	*bất phương trình vô nghiệm*

215. HS tự làm.

216. ĐS : a) $0 < x \le 1$; b) $1 < x < 2 ; -1 < x < 0$; c) $x < 0 ; 1 < x < \dfrac{3}{2}$.

217. ĐS : a) $x < -1 ; \dfrac{3}{2} < x < 2 ; x > 3$; b) $-1 < x < 1 ; -5 \le x \le -2$;

c) $-2 < x \le \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $0 < x < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

218. a) $(x-3)\sqrt{x^2-4x-5} \ge 0$

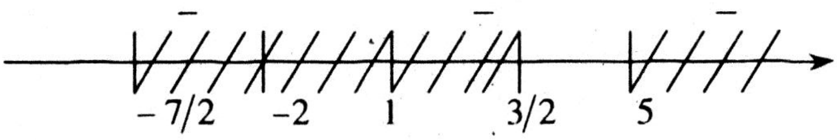
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \ge 0 \\ x^2-4x-5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x \le -1; x \ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 5.$$

b) $$\frac{\sqrt{2x^2+5x-7}}{2x-3} \ge \frac{\sqrt{2x^2+5x-7}}{x+2} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5x-7}\left(\frac{1}{2x-3} - \frac{1}{x+2}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5x-7}.\frac{5-x}{(2x-3)(x+2)} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+5x-7 \ge 0 \\ \dfrac{5-x}{(2x-3)(x+2)} \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{7}{2}; x \ge 1 \\ x \ne 2; x \ne \dfrac{3}{2} \\ (5-x)(2x-3)(x+2) \ge 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$



Bất phương trình có nghiệm $x \le -\dfrac{7}{2}$; $\dfrac{3}{2} < x \le 5$

c) $$\frac{|x+1|}{x-1} \le 3 \Leftrightarrow \frac{|x+1| - 3x + 3}{x-1} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -1 \\ \dfrac{4-2x}{x-1} \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1 \\ \dfrac{2-4x}{x-1} \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -1 \\ x < 1; x \ge 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1 \\ x \le \dfrac{1}{2}; x > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le x < 1; x \ge 2 \\ x < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x < 1 \ ; x \ge 2$$

219. a) $\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ 4x^2 + 4x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0; x \geq 2 \\ (2x+1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0 \ ; x \geq 2$

b) $\begin{cases} -x^2 + x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 3x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 \leq 0 \\ -3 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -3 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 0$

c) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2; x \geq 3 \\ -3 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -2$

d) $\begin{cases} 5x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ 7x^2 + 9x - 16 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Đúng với } \forall x \\ -\dfrac{16}{7} \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{16}{7} \leq x \leq 1$

220. a) $x^2 - 7x + 12 < |x-4| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 7x + 12 < x - 4 \\ x \geq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 7x + 12 < 4 - x \\ x < 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 8x + 16 < 0 \\ x \geq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 6x + 8 < 0 \\ x < 4 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-4)^2 < 0 \\ x \geq 4 \end{cases} \text{ vô nghiệm} \\ \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x < 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2 < x < 4$

b) $|x^2 - x| + |2x - 4| \leq 3$. Ta có bảng xét dấu sau :

x	0	1	2	
$\lvert x^2 - x \rvert$	$x^2 - x$	$x - x^2$	$x^2 - x$	$x^2 - x$
$\lvert 2x - 4 \rvert$	$4 - 2x$	$4 - 2x$	$4 - 2x$	$2x - 4$
VT	$x^2 - 3x + 4$	$-x^2 - x + 4$	$x^2 - 3x + 4$	$x^2 + x - 4$

- $\begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 4 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

  $\Leftrightarrow$ Vô nghiệm.

- $\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ -x^2 - x + 4 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x^2 + x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x \leq \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; x \geq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 1.$

$$\begin{cases}1 < x \le 2\\ x^2 - 3x + 4 \le 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 < x \le 2\\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \le x \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \le 2.$$

- $\begin{cases}x > 2\\ x^2 + x - 4 \le 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x > 2\\ x^2 + x - 7 \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x > 2\\ \dfrac{-1-\sqrt{29}}{2} \le x \le \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow 2 < x \le \frac{-1+\sqrt{29}}{2}.$$

Kết hợp ta được : $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \le x \le \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$.

c) $$\left|x^2 - 3x + 2\right| \le 3x - 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le 1; x \ge 2\\ x^2 - 3x + 2 \le 3x - 3\end{cases}\\ \begin{cases}1 < x < 2\\ -x^2 + 3x - 2 \ge 3x - 3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le 1; x \ge 2\\ x^2 - 6x + 5 \le 0\end{cases}\\ \begin{cases}1 < x < 2\\ x^2 - 1 \ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le 1; x \ge 2\\ 1 \le x \le 5\end{cases}\\ \begin{cases}1 < x < 2\\ x \ge 1; x \le -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1; 2 \le x \le 5\\ 1 < x < 2\end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \le x \le 5.$$

d) $$x\left|x - 3\right| - 4 \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge 3\\ x^2 - 3x - 4 \le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x < 3\\ 3x - x^2 - 4 \le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge 3\\ -1 \le x \le 4\end{cases}\\ \begin{cases}x < 3\\ x^2 - 3x + 4 \ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3 \le x \le 4\\ x < 3\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x \le 4$.

221. $(m - 1)x^2 - 2(m + 3)x - m + 2 = 0$

- $m = 1$ phương trình là : $-8x + 1 = 0 \leftrightarrow x = \dfrac{1}{8}$.
- $m \ne 1$. Ta có : $\Delta' = (m + 3)^2 + (m - 1)(m - 2) = 2m^2 + 3m + 11 > 0\ \forall\, m$ (vì $\delta < 0$). Vậy phương trình luôn có nghiệm $\forall m$. Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = 1$.

222. a) $(m^2 + 5m - 6)x^2 - 2(m + 1)x + 2 < 0$ đúng $\forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m < -6; m > 1\\ -m^2 - 8m - 12 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m < -6; m > 1\\ m^2 + 8m + 12 > 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m < -6; m > 1\\ m < -4 - \sqrt{28}; m > -4 + \sqrt{28}\end{cases} \Leftrightarrow m < -4 - \sqrt{28}; m > -4 + \sqrt{28}.$$

b) $\dfrac{5x^2-2x-3}{-2(m+1)x^2+(m-1)x+m+3}>0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(5x+3)}{(1-x)[m+3+2(m+1)x]}>0$

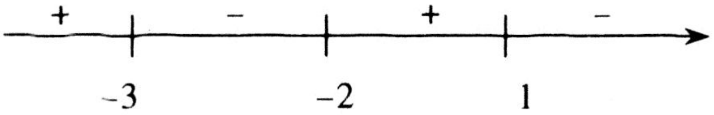
Rõ ràng với x = 1 bất phương trình không tồn tại. Vậy không có giá trị nào của m để bất phương trình đúng $\forall$ x.

223. HS tự làm.

224. a) Để $f(x)=0$ có $2 \le x_1 < x_2$ thì $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(2) \ge 0 \\ 2 < \dfrac{S}{2} \end{cases}$

+ Xét $\Delta > 0$

$$\Delta' = (m-1)^2 - (m-1)(m+1)(m+5) = (m-1)(m-1-m^2-6m-5)$$
$$= (m-1)(-m^2-5m-6) = (1-m)(m^2+5m+6)$$



$\Delta > 0 \Leftrightarrow m < -3\ ;\ -2 < m < 1$

+ $af(2) = (m+1)(m^2+4m+3) = (m+1)^2(m+3) \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -3$

+ $2 < \dfrac{m-1}{m+1} \Leftrightarrow \dfrac{m-1-2m-2}{m+1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{m+3}{m+1} < 0 \Leftrightarrow -3 < m < -1$

Lấy giao của 3 tập nghiệm ta có điều kiện là $-2 < m < -1$

b) Để có $x_1 < 2 < x_2$ thì $af(2) < 0 \Leftrightarrow m < -3$

c) Để phương trình có nghiệm lớn hơn 2 thì chính là hợp của 2 tập nghiệm của câu (a) và câu (b), nên có đáp số là : $m < -3$ hoặc $-2 < m < -1$

d) Với điều kiện $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow m \le -3$ hoặc $-2 \le m \le 1$; ta có

$$x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1} \qquad (1)$$

$$x_1x_2 = \frac{m^2+4m-5}{m+1} \qquad (2)$$

Từ (1) $\Rightarrow x_1 + x_2 = 2 - \dfrac{4}{m+1} \Rightarrow \dfrac{4}{m+1} = 2 - x_1 - x_2$

$$\Rightarrow m+1 = \frac{4}{2-x_1-x_2} \Rightarrow m = \frac{4-2+x_1+x_2}{2-x_1-x_2} = \frac{2+x_1+x_2}{2-x_1-x_2}$$

Vậy hệ thức giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc m là $x_1x_2 . \dfrac{4}{2-x_1-x_2}$

$$\Rightarrow \frac{4x_1x_2}{2-x_1-x_2} = \left(\frac{2+x_1+x_2}{2-x_1-x_2}\right)^2 + 4\left(\frac{2+x_1+x_2}{2-x_1-x_2}\right) - 5$$

với điều kiện $m \le -5\ ;\ -2 < m \le 1$

225. HS tự làm.

226. Cho $x^2 - 2(m^2 + 1)x + m^4 < 0$ và $x^2 + 4x + 3 > 0$.

Bất phương trình thứ hai có nghiệm là : $x < -3$; $x > -1$.

Bất phương trình thứ nhất có nghiệm thì sẽ có dạng : $\alpha < x < \beta$.

Để nghiệm của bất phương trình thứ nhất cũng là nghiệm của bất phương trình thứ hai thì : $\alpha < \beta < -3$ hoặc $-1 < \alpha < \beta$.

Vậy điều kiện là : $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(-3) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < -3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(-1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > -1 \end{cases}$

Xét $\Delta' = (m^2 + 1)^2 - m^4 = 2m^2 + 1 > 0 \ \forall m$.

Xét $f(-3) = 9 + 6(m^2 + 1) + m^4 = m^4 + 6m^2 + 15 = (m^2 + 3)^2 + 6 > 0 \ \forall m$.

Xét $\dfrac{S}{2} < -3 \Leftrightarrow m^2 + 1 < -3$ vô nghiệm.

Vậy $\alpha < \beta < -3$ không xảy ra

Xét $f(1) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2m^2 - 2 + m^4 = m^4 - 2m^2 - 1 > 0$

$\Leftrightarrow (m^2 - 1 - \sqrt{2})(m^2 - 1 + \sqrt{2}) > 0 \Leftrightarrow m^2 > 1 + \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow m > \sqrt{1+\sqrt{2}}$ hoặc $m < -\sqrt{1+\sqrt{2}}$

Xét $\dfrac{S}{2} > 1 \Leftrightarrow m^2 + 1 > 1 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

Vậy trường hợp 2 xảy ra khi $1 < \alpha < \beta$

Vậy $m < -\sqrt{1+\sqrt{2}}$ hoặc $m > \sqrt{1+\sqrt{2}}$ thì nghiệm của bất phương trình có tham số là nghiệm của bất phương trình $x^2 + 4x + 3 > 0$

227. $\begin{cases} 3x^2 + 4mx - 4 = 0 \\ |x| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4mx - 4 = 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$

Hệ sẽ vô nghiệm khi $\Delta < 0$ hoặc $\Delta \geq 0$ mà nghiệm ngoài khoảng $(-1 ; 1)$

Ta có $\Delta' = 4m^2 + 12 > 0$ với $\forall m$

Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - 4m \leq 0 \\ 4m - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\dfrac{1}{4} \\ m \leq \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Vậy hệ vô nghiệm khi $-\dfrac{1}{4} \leq m \leq \dfrac{1}{4}$

Hệ có nghiệm khi $m < -\dfrac{1}{4}$; $m > \dfrac{1}{4}$

228. $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = m \\ x^2 - 2x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 - m = 0 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$

KL : Hệ vô nghiệm khi $m < -\frac{1}{4}$ hoặc $m > 2$; có nghiệm khi $-\frac{1}{4} \le m \le 2$

229. $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \le 0 & (1) \\ x^2 - x - 2m^2 \le 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 3 \\ x^2 - x - 2m^2 \le 0 \end{cases}$

a) Bất phương trình 2 có $\Delta = 1 + 4m^2 > 0$ với $\forall m$ nên luôn có nghiệm dạng $\alpha < x < \beta$. Để hệ có nghiệm thì $[2 ; 3]$ và $[\alpha ; \beta]$ phải giao nhau $\neq \varnothing$. Do đó $2 \le \alpha \le 3$ hoặc $2 \le \beta \le 3$. Cả 2 trường hợp đó đều cùng điều kiện :

$f(2).f(3) \le 0$ với $f = x^2 - x - 2m^2$

$f(2).f(3) \le 0 \Leftrightarrow (2 - 2m^2)(6 - 2m^2) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m^2 \le 3$

$\Leftrightarrow 1 \le m \le 3$ hoặc $-3 \le m \le -1$

b) Để hệ có nghiệm duy nhất thì $\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m^2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1$

hoặc $\begin{cases} f(3) = 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 3 \\ m^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow$ vô nghiệm

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = \pm 1$

230. $\sqrt{2x^2 - 2(m + 4)x + 5m + 10} = x - 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \ge 0 \\ 2x^2 - 2(m + 4)x + 5m + 10 = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x^2 - 2(m - 1)x + 5m + 1 = 0 \end{cases}$

Hệ vô nghiệm khi $\Delta < 0$ hoặc $\Delta \ge 0$ mà $3 > x_1 \ge x_2$

$\Delta' = (m - 1)^2 - (5m + 1) = m^2 - 7m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 7$

Trường hợp 2 xảy ra khi $\begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ af(3) > 0 \\ 3 > \frac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0; m \ge 7 \\ 15 - m > 0 \\ m - 1 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0; m \ge 7 \\ m < 15 \\ m < 4 \end{cases}$

Vậy hệ vô nghiệm khi $m < 7$; hệ có nghiệm khi $m \ge 7$

231. $mx^2 - 3(m - 1)x + 4(m - 1) = 0$

a) Phương trình có nghiệm kép khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9(m - 1)^2 - 16m(m - 1) = 0 \end{cases}$

Xét $\Delta = -7m^2 - 2m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = 1$; $m = -\dfrac{9}{7}$

b) Tìm m để phương trình có đúng 1 nghiệm $\in (2\ ;5)$

$m = 0 \Rightarrow 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3} \in (2\ ;5)$

$m \neq 0$ phương trình có 2 nghiệm và 1 nghiệm $\in (2\ ;5)$; 1 nghiệm ngoài khoảng $(2\ ;5) \Rightarrow$ điều kiện là :

$$\begin{cases}\Delta \geq 0\\ f(2)f(5) \leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-7m^2 - 2m + 9 \geq 0\\ (2m+2)(14m+11) \leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{9}{7} \leq m \leq 1\\ -1 \leq m \leq -\dfrac{11}{4}\end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq -\dfrac{11}{4}$$

232. Vì $x^2 - x + 1 > 0$ với $\forall x \Rightarrow$ bất phương trình đã cho tương đương với :

$$-3x^2 + 3x - 3 \leq x^2 + mx - 2 \leq 2x^2 - 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x^2 + (m-3)x + 1 \geq 0\\ x^2 - (2+m)x + 4 \geq 0\end{cases} \text{hệ đúng với } \forall x \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_1 < 0\\ \Delta_2 < 0\end{cases} \text{vì } a > 0$$

$$\text{vậy} \begin{cases}(m-3)^2 - 16 < 0\\ (m+2)^2 - 16 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 6m - 7 < 0\\ m^2 + 4m - 12 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1 < m < 7\\ -6 < m < 2\end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 2$$

233. a) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2)(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow$ vô nghiệm

b) $x^4 - x^2 + 2 = 0$

Đặt $x^2 = t \geq 0$ ta có $t^2 - t + 2 = 0$. $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình đã cho vô nghiệm

c) $16x^4 - 15x^2 - 16 = 0$

Đặt $x^2 = t \geq 0$ ta có $16t^2 - 15t - 16 = 0$

$\Delta = 225 + 1024 = 1249 \Rightarrow t_1 = \dfrac{15 - \sqrt{1249}}{32}$; $t_2 = \dfrac{15 + \sqrt{1249}}{32}$

Chỉ có $t_1 > 0$ thỏa mãn $\Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{15 + \sqrt{1249}}{32}}$

d) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2 = 4\\ x^2 = 1\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm 2$; $x = \pm 1$

234. HS tự làm.

235. a) $(x + 2)(x - 3)(x + 1)(x + 6) = -36$

$\Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x - 18) = -36$

Đặt $x^2 + 3x + 2 = t \Rightarrow t(t - 20) = -36 \Leftrightarrow t^2 - 20t + 36 = 0$

$\Delta' = 100 - 36 = 64 \Rightarrow t = 2$; $t = 18$

$t = 2 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0$; $x = -3$

$t = 18 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 18 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x = 0$; $x = -3$; $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$

b) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x$ (1)

$x = 0$ không là nghiệm $\Rightarrow$ chia 2 vế cho $x \neq 0$ ta được

$(1) \Leftrightarrow \left(2x + \dfrac{1}{x} - 3\right)\left(2x + \dfrac{1}{x} + 5\right) = 9$

Đặt $2x + \dfrac{1}{x} - 3 = t \Rightarrow t(t + 8) = 9 \Leftrightarrow t^2 + 8t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1$; $t = -9$

$t = 1 \Leftrightarrow 2x + \dfrac{1}{x} - 3 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

$t = -9 \Leftrightarrow 2x + \dfrac{1}{x} - 3 = -9 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$; $x_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$

236. a) $\left|x^2 - 5x + 4\right| = x + 4$, phương trình chỉ có nghiệm với $x \geq -4$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 4 = x + 4 \\ x^2 - 5x + 4 = -x - 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x = 0 \\ x^2 - 4x + 8 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; x = 6 \\ \text{vô nghiệm} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$; $x = 6$.

b) $\left|x^2 - 3x + 2\right| = 1 - |x|$, phương trình chỉ có nghiệm với $|x| \leq 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 1 - x \\ x^2 - 3x + 2 = 1 + x \\ -x^2 + 3x - 2 = 1 - x \\ -x^2 + 3x - 2 = 1 + x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 - 2x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \\ x = 1; x = 3 \\ \text{vô nghiệm} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{array}\right.$$

237. a) $2 - \big|1 - |x|\big| = 1 \Leftrightarrow \big|1 - |x|\big| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - |x| = 1 \\ 1 - |x| = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = 0 \\ |x| = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0$; $x = \pm 2$

b) $\dfrac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} = 2x$. **Điều kiện** $x \neq 3$

$$\Leftrightarrow x^2 - \{x\} - 12 = 2x^2 - 6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 5x + 12 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 7x + 12 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{vô nghiệm} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x = 3; x = 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình vô nghiệm

238. a) $x^2 + 9 = 6x + 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}$. Điều kiện : $x^2 - 6x + 6 \ge 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}$

Đặt $\sqrt{x^2 - 6x + 6} = t \Rightarrow t^2 = x^2 - 6x + 6$

$\Rightarrow t^2 + 3 = 4t \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1\ ;\ t = 3$

$t = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1\ ;\ x = 5$

$t = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{3}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x = 1\ ;\ x = 5\ ;\ x = 3 \pm 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{5x - 1} = \sqrt{x - 1} - \sqrt{3x - 2}$

Điều kiện : $\begin{cases} 5x - 1 \ge 0 \\ x - 1 \ge 0 \\ 3x - 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1$

$\Rightarrow \sqrt{5x - 1} + \sqrt{3x - 2} = \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow 5x - 1 + 3x - 2 + 2\sqrt{15x^2 - 13x + 2} = x - 1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{15x^2 - 13x + 2} = 2 - 7x$. Với $x \ge 1$ thì vế phải < 0

$\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

239. a) $x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 9x + 1 \ge 0$

$x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia hai vế của phương trình cho $x^2 > 0$ ta có :

$x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 9\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 10 \ge 0$. Đặt $x + \dfrac{1}{x} = t$ ta có :

$t^2 - 2 - 9t + 10 \ge 0 \Leftrightarrow t^2 - 9t + 8 \ge 0 \Leftrightarrow t \le 1\ ;\ t \ge 8$

$t \le 1 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} \le 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \le 0 \Leftrightarrow$ vô nghiệm

$t \ge 8 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} \ge 8 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \le 4 - \sqrt{15}\ ;\ x \ge 4 + \sqrt{15}$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x = 0$ và $x \le 4 - \sqrt{15}\ ;\ x \ge 4 + \sqrt{15}$

b) $x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 \ge 0$

$\Leftrightarrow x^4 + 12x^3 + 36x^2 - 4x^2 - 8x - 4 \ge 0 \Leftrightarrow (x^2 + 6x)^2 - (2x - 2)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 2x - 2)(x^2 + 6x - 2x + 2) \ge 0 \Leftrightarrow (x^2 + 8x - 2)(x^2 + 4x + 2) \ge 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 8x - 2 \ge 0 \\ x^2 + 4x + 2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 8x - 2 \le 0 \\ x^2 + 4x + 2 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -4 - 3\sqrt{2}; x \ge -4 + 3\sqrt{2} \\ x \le -2 - \sqrt{2}; x \ge -2 + \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} -4 - 3\sqrt{2} \le x \le -4 + 3\sqrt{2} \\ -2 - \sqrt{2} \le x \le -2 + \sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -4 - 3\sqrt{2}; x \ge -4 + 3\sqrt{2} \\ -2 - \sqrt{2} \le x \le -2 + \sqrt{2} \end{array}\right.$$

240. a) $\begin{cases} \sqrt{-x^2 - x + 6} > 6x + 3 \\ \left|x^2 - 2x - 8\right| \ge 2x \end{cases}$

Giải $\sqrt{-x^2 - x + 6} > 6x + 3$. Điều kiện : $-x^2 - x + 6 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 \le 0$ $\Leftrightarrow -3 \le x \le 2$. Với $-3 \le x \le -\frac{1}{2}$ thì vế phải ≤ 0 nên bất phương trình được nghiệm với $x > -\frac{1}{2}$. Khi đó bình phương 2 vế ta có :

$$-x^2 - x + 6 > 6x^2 + 18x + 9 \Leftrightarrow 7x^2 + 19x + 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-19 - \sqrt{277}}{14} < x < \frac{-19 + \sqrt{277}}{14}$$

Vậy bất phương trình (1) có nghiệm $-3 \le x \le \frac{-19 + \sqrt{277}}{14}$

Giải $\left|x^2 - 2x - 8\right| \ge 2x$. Bất phương trình thỏa mãn với $x \le 0$

Với $x > 0$:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 8 \ge 2x \\ -x^2 + 2x - 8 \ge 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x - 8 \ge 0 \\ x^2 + 8 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 2 - 2\sqrt{3}; x \ge 2 + 2\sqrt{3} \\ \text{vô nghiệm} \end{array}\right.$$

Cuối cùng ta có hệ $\begin{cases} x \le 0; x \ge 2 + 2\sqrt{3} \\ -3 \le x \le \dfrac{-19 + \sqrt{277}}{14} \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le x \le \dfrac{-19 + \sqrt{277}}{14}$

b) HS tự làm..

241. a) $x^2 - \sqrt{x + 6} = 6$. Điều kiện : $x \ge -6$

Đặt $t = \sqrt{x + 6} \ge 0 \Rightarrow$ ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 = t + 6 \\ t^2 = x + 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (x - t)(x + t + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = x \\ t = -x - 1 \end{array}\right.$$

Với $t = x$ ta có $x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ và $x = -2$ (loại vì $t = x > 0$)

Với $t = -x - 1$ ta có $x^2 + x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$. Vì $-x - 1 = t > 0$ nên chỉ nhận $x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$ và $x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$

b) $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} \geq 0$. Điều kiện : $6x^2 - 12x + 7 \geq 0$

Đặt $t = \sqrt{6x^2 - 12x + 7}, t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 6x^2 - 12x + 7$

$\Rightarrow 12x - 6x^2 = 7 - t^2 \Rightarrow 2x - x^2 = \dfrac{7 - t^2}{6}$

$\Rightarrow \dfrac{7 - t^2}{6} + t \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t - 7 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 7$

$\Rightarrow 0 \leq 6x^2 - 12x + 7 \leq 49$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 12x + 7 \geq 0 \\ 6x^2 - 12x - 42 \leq 0 \end{cases}$$

bất phương trình (1) đúng với $\forall x$ (vì $\Delta < 0$)

bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{8} \leq x \leq 1 + \sqrt{8}$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $1 - \sqrt{8} \leq x \leq 1 + \sqrt{8}$

c) $\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x - 1} = \sqrt[3]{5x}$

Lập phương 2 vế ta có : $x + 1 + x - 1 + 3\sqrt[3]{x^2 - 1}\left(\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x - 1}\right) = 5x$

$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x^2 - 1)}.\sqrt[3]{5x} = 3x \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x^2 - 1)5x} = x \Leftrightarrow (x^2 - 1)5x = x^3$

$$\Leftrightarrow x(5x^2 - 5 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x(4x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

242. a) $x^4 + 2mx^2 + m + 3 = 0$

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình trung gian phải có 2 nghiệm dương

Để phương trình $t^2 + 2mt + m + 3 = 0$ có 2 nghiệm dương thì :

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 3 > 0 \\ m + 3 > 0 \\ -2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1 - \sqrt{13}}{2}; m > \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ m > -3 \\ m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -3 < m < \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

Gọi 2 nghiệm của phương trình trung gian là $t_1 < t_2$ thì 4 nghiệm theo thứ tự sẽ là $-\sqrt{t_2} < -\sqrt{t_1} < \sqrt{t_1} < \sqrt{t_2}$

Theo yêu cầu $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < 2 < x_4$

nghĩa là $\sqrt{t_1} < 1$ và $\sqrt{t_2} > 2 \Rightarrow t_1 < 1$; $t_2 > 4$

Vậy 1 và 4 nằm trong khoảng 2 nghiệm $\Rightarrow$ cần có điều kiện đối với

$f = t^2 + 2mt + m + 3$ phải có $\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 4 < 0 \\ 9m + 19 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\dfrac{4}{3} \\ m < -\dfrac{19}{9} \end{cases}$

Vậy đáp số bài toán là $-\dfrac{19}{9} < m < \dfrac{1 - \sqrt{13}}{2}$

b) $f(x) = 2x^4 + mx^2 + 2 = 2t^2 + mt + 2$

+ Như trên f = 0 có 4 nghiệm thì $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16 > 0 \\ 1 > 0 \\ -\dfrac{m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \,;\, m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$

Vậy $m < -4$

Để có 4 nghiệm $x_1 < -2 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$

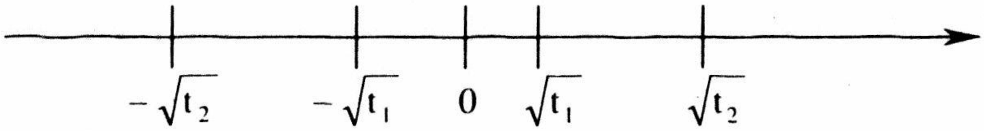
nghĩa là $-\sqrt{t_2} < -2 < -\sqrt{t_1} < \sqrt{t_1} < 1 < \sqrt{t_2} \Rightarrow \begin{cases} 0 < t_1 < 1 \\ t_2 > 4 \end{cases}$

$\Rightarrow$ cả 1 và 4 nằm trong khoảng 2 nghiệm của $f = 2t^2 + mt + 2 = 0$.

$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = m + 4 < 0 \\ f(4) = 4m + 34 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m < -\dfrac{34}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m < -\dfrac{34}{4}$

Vậy $m < -\dfrac{34}{4}$

+ Để x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 lập thành cấp số cộng, ta biểu diễn 4 nghiệm :



Do đó $\sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Rightarrow t_2 = 9t_1$

Vậy để phương trình $2x^4 + mx^2 + 2 = 0$ có 4 nghiệm lập thành cấp số cộng thì phương trình $2t^2 + mt + 2 = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt mà $t_2 = 9t_1$

$m < -4$ là điều kiện để có 2 nghiệm dương phân biệt

Để $t_2 = 9t_1$ ta có : $\begin{cases} S = 10t_1 = -\dfrac{m}{2} \\ P = 9t_1 = 1 \end{cases}$

Vậy $t_1^2 = \dfrac{1}{9} \Rightarrow t_1 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow t_2 = 3 \Rightarrow \dfrac{10}{3} = -\dfrac{m}{2} \Rightarrow m = -\dfrac{20}{3}$.

Từ bài 243 – 262 HS tự làm.

263. 1) • Ta đã biết một đơn vị đo góc là *độ* :

* Góc bẹt có số đo 180^{o}

* $1^{o} = 60', 1' = 60''$

• Một đơn vị đo góc nữa là rađian (viết tắt là rad)

• Người ta coi góc bẹt $\left(180^{o}\right)$ cũng như nửa đường tròn có số đo là π rad :

$$\boxed{180^{o} = \pi\text{rad}}$$

$$1^{o} = \frac{\pi}{180}\text{ rad},\quad \boxed{a^{o} = \frac{\pi a}{180}\text{rad}}\quad (0 \le a \le 360)$$

$$1\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{o} \approx 57^{o}17'45''$$

$$\boxed{\alpha\text{rad} = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^{o}\ (0 \le \alpha \le 2\pi)}$$

2) Một đường tròn có bán kính R thì có độ dài bằng $2\pi R$ và có số đo bằng 360^{o}.

Vậy góc ở tâm là 1^{o} thì độ dài của cung bị chắn là $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$.

Do đó cung tròn có góc ở tâm là $a^{o}\,(0 \le a \le 360)$ thì có độ dài là

$$\boxed{l = \frac{\pi R a}{180}}$$

Tương tự, nếu góc ở tâm là αrad $(0 \le \alpha \le 2\pi)$ thì độ dài là $\boxed{l = R\alpha}$ $(0 \le \alpha \le 2\pi)$

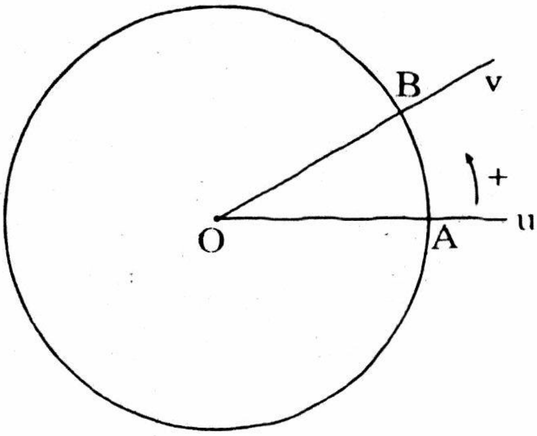
Như vậy cung tròn có số đo *1rad* thì có *độ dài bằng bán kính*

Cung tròn nằm trên *đường tròn đơn vị* thì có *độ dài bằng số đo rad của nó.*

264. a) $\widehat{uOv} = 30^{o}$ thì $(Ou, Ov) = 30^{o} + k.360^{o}$ $(k \in \mathbb{Z})$

b) $\widehat{uOv} = \frac{\pi}{3}$Rad thì

$(Ou, Ov) = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$



Hình 27

265. a) Đường tròn định hướng là một đường tròn, trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là *chiều dương*, chiều ngược lại là chiều âm.

Người ta quy ước chọn *chiều ngược với chiều quay* của kim đồng hồ là *chiều dương*.

Biểu diễn góc $(Ou, Ov) = 30^o + k360^o$, $(k \in \mathbb{Z})$ trên đường tròn định hướng (h. 27) ta được cung lượng giác AB

$$\text{sđ } \overset{\curvearrowright}{AB} = 30^o + k360^o, (k \in \mathbf{Z})$$

Như vậy mỗi góc lượng giác ứng với một cung lượng giác và ngược lại.

b) Góc hình học $\widehat{uOv}$ là hoàn toàn xác định, góc lượng giác (Ou, Ov) không được xác định duy nhất.

Cũng như vậy cung hình học $\overset{\frown}{AB}$ (cung bé hoặc cung lớn) hoàn toàn xác định, còn cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AB}$ không được xác định duy nhất

c) Với ba tia tuỳ ý Ou, Ov, Ow ta có :

$$\boxed{\text{sđ } (Ou, Ov) + \text{sđ } (Ov, Ow) = \text{sđ } (Ou, Ow) + k2\pi \ (k \in \mathbf{Z})}$$

Đó là hệ thức Salơ về số đo của góc lượng giác

266. 1)

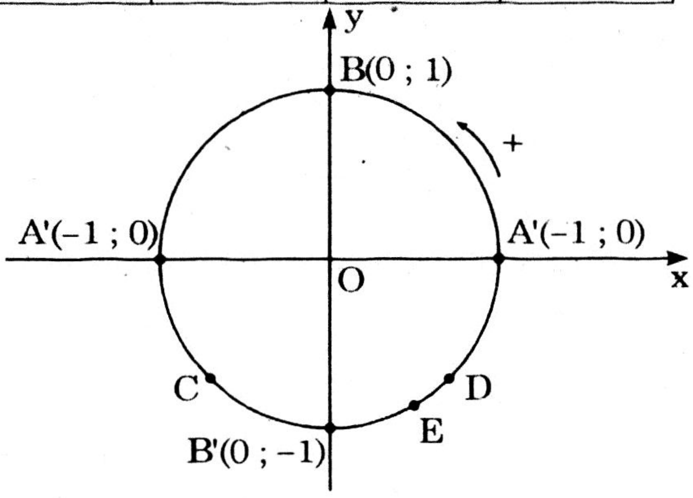
Độ	25^o	35^o	45^o	55^o	60^o	$60^o\ 30'$	75^o	$120^o\ 15'$	270^o
Rad	$\frac{5\pi}{36}$	$\frac{7\pi}{36}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{11}{36}\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{12,1\pi}{36}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{30,1\pi}{45}$	$\frac{3\pi}{2}$

2)

Rad	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{7}$	$\frac{5\pi}{11}$	$\frac{6\pi}{13}$	$\frac{8\pi}{15}$
Độ	36^o	60^o	$\approx 77^o,14'$	$\frac{900^o}{11}$	$\frac{1080^o}{13}$	72^o

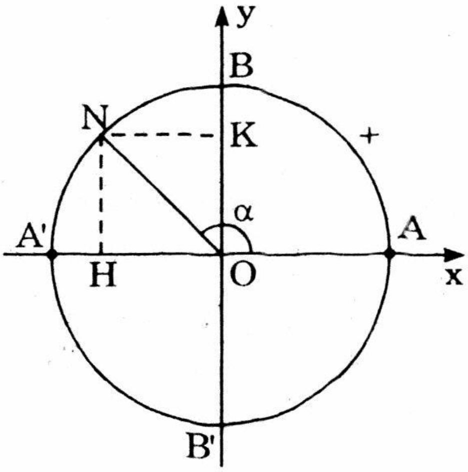
267. 1) Đường tròn lượng giác là đường tròn định hướng có tâm O trùng với gốc O của mặt phẳng toạ độ Oxy và có R = 1 (h. 30a)

2) Các cung lượng giác $\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, 315^o, -270^o, \frac{5\pi}{3}$ có các điểm cuối lần lượt là B, C, D, B, E trên hình 30a.



Hình 30a

268. 1) Trên đường tròn lượng giác (h. 30b) xác định cung $\overset{\frown}{AN}$, sđ $\overset{\frown}{AN} = \alpha$



Hình 30b

- Tung độ của điểm $N\left(y = \overline{OK}\right)$ gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin\alpha$

$$\boxed{\sin\alpha = \overline{OK}}$$

- Hoành độ của điểm $N\left(x = \overline{OH}\right)$ gọi là cosin của α và kí hiệu là $\cos\alpha$

$$\boxed{\cos\alpha = \overline{OH}}$$

- Nếu $\cos\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ gọi là tang của α và kí hiệu là $\tan\alpha$ (hay $\text{tg}\alpha$)

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

- Nếu $\sin\alpha \neq 0$ tỉ số $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ gọi là cotang của α và kí hiệu $\cot\alpha$ (hay $\text{cotg}\alpha$)

Các giá trị $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là *các giá trị lượng giác* của cung α

Người ta gọi trục tung là trục sin, trục hoành là trục cosin.

Chú ý

- $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ xác định $\forall\alpha \in \mathbf{R}$ và

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha, \forall k \in \mathbf{Z}$$

$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha, \forall k \in \mathbf{Z}$$

- $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

  $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

- $\tan\alpha$ xác định $\forall\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$

- $\cot\alpha$ xác định $\forall\alpha \neq k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$

2) Xem hình 30b. Ta có $\sin\alpha = \overline{OK}$, $\cos\alpha = \overline{OH}$ mà $-1 \leq \overline{OK} \leq 1$, $-1 \leq \overline{OH} \leq 1$ suy ra $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

269. a) Các giá trị lượng giác của các cung $0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}...$ cho trong bảng sau

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định	$-\sqrt{3}$	0
$\cot\alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	Không xác định

b) Các công thức lượng giác cơ bản

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha \neq k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$$

$$\tan\alpha.\cot\alpha = 1$$

c) Xem hình 30b trong tam giác vuông HON vuông ở H, $\overline{OK} = \overline{HN}$

Theo định lí Pitago ta có : $HN^2 + OH^2 = ON^2 = 1\ (ON = R = 1)$

Vậy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

270. a) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = \left(\sin^2\alpha\right)^3 + \left(\cos^2\alpha\right)^3 + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha\right) + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$= \cos^4\alpha + \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)^2 = 1$$

b) $3.\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 4.1 + 5.(-1) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

c) $3\sin\frac{25\pi}{6} - 3\cos\frac{19\pi}{3} + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\frac{\pi}{6} - 3\cos\frac{\pi}{3} + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$$= 3.\frac{1}{2} - 3.\frac{1}{2} - 1 = -1$$

271. a) $\sin\alpha + \cos\alpha = m \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = m^2$

nên $2\sin\alpha\cos\alpha = m^2 - 1$.

$$\text{Vậy } |\sin\alpha - \cos\alpha|^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= 1 - 2\left(m^2 - 1\right) = 2\left(1 - m^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad |\sin\alpha - \cos\alpha| = \sqrt{2\left(1 - m^2\right)} \quad \text{với} \quad |m| \le 1$$

b) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)^2 - 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha$

$$= 1 - \frac{\left(m^2 - 1\right)^2}{2} = \frac{1 - m^4 + 2m}{2}$$

272. 1) Dễ dàng chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, d ta có :

$$(ab + cd)^2 \le \left(a^2 + c^2\right)\left(b^2 + d^2\right)$$

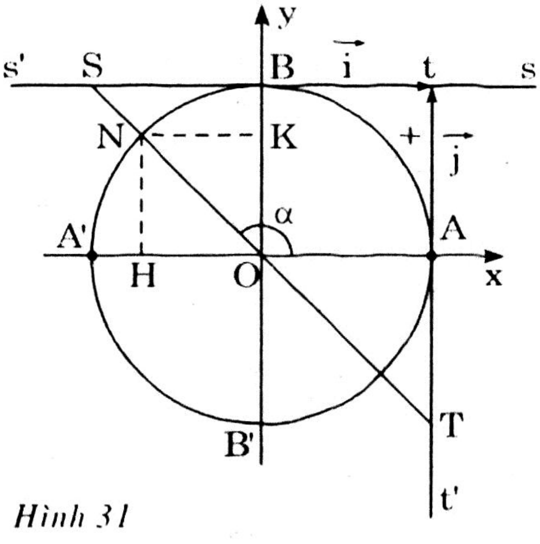
Do đó $\quad (3\cos x + 4\sin x)^2 \le \left(3^2 + 4^2\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$

$$\le 25 \ (\text{do } \cos^2 x + \sin^2 x = 1)$$

$\Rightarrow \ |3\cos x + 4\sin x| \le 5$ suy ra điều phải chứng minh

2) Theo câu 1), ta có $-\sqrt{13} \le 3\cos x + 2\sin x \le \sqrt{13}$

Vậy GTNN $(3\cos x + 2\sin x) = -\sqrt{13}$



Hình 31

273. Trên đường tròn lượng giác (h. 31): Tại A kẻ tiếp tuyến t'At với đường tròn. Coi tiếp tuyến này là một trục số có gốc là A và véctơ đơn vị $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$. Cho cung $\overset{\frown}{AN}$ có số đo bằng $\alpha \left(\alpha \ne \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Gọi T là giao điểm của ON với trục t'At. Ta có $\tan\alpha = \overline{AT}$.

Thật vậy $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\overline{HN}}{\overline{OH}}$ (1) (do $\overline{HN} = \overline{OK}$)

ΔONH ∽ ΔOTA (hai tam giác vuông có một góc nhọn bằng nhau)

$$\Rightarrow \frac{\overline{HN}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} \Rightarrow \frac{\overline{HN}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} \quad \text{mà } OA = 1$$

nên $\overline{AT} = \dfrac{\overline{HN}}{\overline{OH}}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\tan\alpha = \overline{AT}$

Vậy tanα được biểu diễn bằng độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AT}$, nên trục t'At gọi là trục tang.

Tiếp tuyến s'Bs với đường tròn lượng giác (h. 31) có vectơ đơn vị $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ gọi là trục cotang và $\cot\alpha = \overline{BS}$.

Từ điều đã nêu ta có $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$; $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$

274. a) $3.\frac{\sqrt{3}}{2} - 2.\frac{1}{2} + 3.\sqrt{3} - 4.0 = \frac{9\sqrt{3}}{2} - 1$

b) $5 - 1 + 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3.1^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

275. a) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \tan^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha - \tan^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$= 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$$

b) $\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x\left(\cos^2 x + 1\right) = 1 + \tan^2 x - \tan^2 x\cos^2 x - \tan^2 x$

$$= 1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

c) $\frac{\sin^2 \pi a}{1 + \cos\pi a} = \frac{1 - \cos^2\pi a}{1 + \cos\pi a} = 1 - \cos\pi a \ (1 + \cos\pi a \neq 0)$

d) $\frac{1 - 2\cos^2\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}} = \frac{\sin^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2} - 2\cos^2\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}} = \frac{\sin^2\frac{a}{2} - \cos^2\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}}$

$$= \frac{\left(\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}\right)\left(\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right)}{\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}} = \sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}$$

$$\left(\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}\right) \neq 0$$

276. a) $\sin^4\frac{x}{2} - \cos^4\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} =$

$$= \left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)\left(\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}\right) - \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$$

$= \sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0$ (không phụ thuộc vào x)

b) $\left(\tan\frac{x}{3} + \cot\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\tan\frac{x}{3} - \cot\frac{x}{3}\right)^2 =$

$$= \tan^2\frac{x}{3} + \cot\frac{x}{3} + 2\tan\frac{x}{3}.\cot\frac{x}{3} - \tan^2\frac{x}{3} + 2\tan\frac{x}{3}\cot\frac{x}{3} - \cot^2\frac{x}{3}$$

$$= 4\tan\frac{x}{3}\cot\frac{x}{3} = 4.1 = 4$$

c) $\dfrac{5\cos x - 4}{3 - 5\sin x} - \dfrac{5\sin x + 3}{4 + 5\cos x} = \dfrac{25\cos^2 x - 16 - \left(9 - 25\sin^2 x\right)}{12 + 15\cos x - 20\sin x - 25\sin x\cos x} = 0$

277. 1) $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$, $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$,

$\tan\alpha = -\tan(-\alpha)$, $\cot\alpha = -\cot(-\alpha)$

2) $\sin\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\cos\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$\tan\alpha = \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\cot\alpha = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$

3) $\sin\alpha = -\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$, $\cos\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$

$\tan\alpha = -\cot\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$, $\cot\alpha = -\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$

4) $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$, $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$

$\tan\alpha = -\tan(\pi - \alpha)$, $\cot\alpha = -\cot(\pi - \alpha)$

5) $\sin\alpha = -\sin(\pi + \alpha)$, $\cos\alpha = -\cos(\pi + \alpha)$

$\tan\alpha = \tan(\pi + \alpha)$, $\cot\alpha = \cot(\pi + \alpha)$

278. a) $\sin 51^o - \tan 51^o < 0$ (vì $\sin 51^o < \tan 51^o$)

b) $\cot 130^o - \cos 130^o = \dfrac{\cos 130^o}{\sin 130^o} - \cos 130^o = \dfrac{\cos 130^o\left(1 - \sin 130^o\right)}{\sin 130^o}$

$\cos 130^o < 0$, $1 - \sin 130^o > 0$, $\sin 130^o > 0$.

Vậy $\cot 130^o - \cos 130^o < 0$

c) $\sin 120^o \cos 120^o < 0$ (vì $\sin 120^o > 0, \cos 120^o < 0$)

d) $\tan 150^o \cos 300^o < 0$ (vì $\tan 150^o < 0, \cos 300^o > 0$)

279. a) $\sin 110^o + \sin 130^o + \sin 150^o + \sin 170^o + \sin 190^o +$

$+ \sin 210^o + \sin 230^o + \sin 250^o + \sin 270^o =$

$= \sin 70^o + \sin 50^o + \sin 30^o + \sin 10^o - \sin 10^o - \sin 30^o - \sin 50^o - \sin 70^o - 1 =$

b) $\cos 20^o + \cos 40^o + \cos 60^o + ... + \cos 120^o + \cos 140^o + \cos 160^o + \cos 180^o =$

$= \cos 20^o + \cos 40^o + \cos 60^o + ... - \cos 60^o - \cos 40^o - \cos 20^o - 1 = -1$

c) $\tan 20^o + \tan 40^o + \tan 60^o + ... + \tan 120^o + \tan 140^o + \tan 160^o + \tan 180^o =$

$\tan 20^o + \tan 40^o + \tan 60^o + ... - \tan 60^o - \tan 40^o - \tan 20^o +^o = 0$

d) $\cot 15^o + \cot 30^o + \cot 45^o + ... + \cot 135^o + \cot 150^o + \cot 160^o =$

$\cot 15^o + \cot 30^o + \cot 45^o + ... - \cot 45^o - \cot 30^o - \cot 15^o = 0$

280. a) $\sin^2 20^o + \sin^2 40^o + \sin^2 50^o + \sin^2 70^o =$

$= \cos^2 70^o + \cos^2 50^o + \sin^2 50^o + \sin^2 70^o = 2$

b) $\cos^2\frac{\pi}{13} + \cos^2\frac{3\pi}{13} + \cos^2\frac{5\pi}{13} + \cos^2\frac{11\pi}{26} + \cos^2\frac{7\pi}{26} + \cos^2\frac{3\pi}{26} =$

$= \sin^2\frac{11\pi}{26} + \sin^2\frac{7\pi}{26} + \sin^2\frac{3\pi}{26} + \cos^2\frac{11\pi}{26} + \cos^2\frac{7\pi}{26} + \cos^2\frac{3\pi}{26} = 3$

281. a) $\cot(5,5\pi - \alpha) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 5\pi\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

$\tan(b - 4\pi) = \text{tg}b; \tan(b - 3,5\pi) = \tan\left(b + \frac{\pi}{2} - 4\pi\right) = -\cot b$

Thay vào biểu thức A ta có $A = \dfrac{\tan\alpha + \tan b}{\cot\alpha + \cot b} = \dfrac{\tan\alpha + \tan b}{\dfrac{1}{\tan\alpha} + \dfrac{1}{\tan b}} = \tan\alpha\tan b$

b) $\tan 50^o \tan 190^o \tan 250^o \tan 260^o \tan 400^o \tan 700^o = -1$

282. a) Trong tam giác ABC ta có $A + B + C = 180^o \Rightarrow A + B = 180^o - C$

$\Rightarrow \quad \sin(A + B) = \sin(180^o - C) = \sin C$

$\cos(B + C) = \cos(180^o - A) = -\cos A$

b) $A + B = 180^o - C \Rightarrow \frac{A + B}{2} = 90^o - \frac{C}{2}$

$\sin\frac{A + B}{2} = \sin\left(90^o - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$

$\cos\frac{B + C}{2} = \cos\left(90^o - \frac{A}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}$

c) $\tan(A + C) = \tan(180^o - B) = -\tan B$

$\cot(A + B) = \cot\left(180^o - C\right) = -\cot C$

d) $\tan\frac{A + C}{2} = \tan\left(90^o - \frac{B}{2}\right) = \cot\frac{B}{2}$

$\cot\frac{A + B}{2} = \cot\left(90^o - \frac{C}{2}\right) = \tan\frac{C}{2}$

283. $y = \dfrac{k\sin x + 1}{\cos x + 2} \Rightarrow y\cos x + 2y = k\sin x + 1 \Rightarrow y\cos x - k\sin x = 1 - 2y$

Từ bài 272 ta có : $(y\cos x - k\sin x)^2 \le \left(y^2 + k^2\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = y^2 + k^2$

Mà $(y\cos x - k\sin x)^2 = (1-2y)^2$. Do đó ta có bất phương trình

$$1 - 4y + 4y^2 \le y^2 + k^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - k^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2-\sqrt{1+3k^2}}{3} \le y \le \frac{2+\sqrt{1+3k^2}}{3}$$

Vậy GTNN $y = \dfrac{2-\sqrt{1+3k^2}}{3}$

Muốn GTNN $y < -1 \Rightarrow \dfrac{2-\sqrt{1+3k^2}}{3} < -1$

$$\Leftrightarrow 5 < \sqrt{1+3k^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 3k^2 > 25$$

$$\Leftrightarrow 3k^2 > 24 \Leftrightarrow k^2 > 3$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k > 2\sqrt{2} \\ k < -2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

284. Trong mọi ΔABC ta luôn có

$$\sin A(1 - \sin B) + \sin B(1 - \sin C) + \sin C(1 - \sin A) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A > 0 \quad (1)$$

Ta cũng có $(1 - \sin A)(1 - \sin B)(1 - \sin C) \ge 0$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \sin A - \sin B - \sin C + \sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A - \sin A\sin B\sin C \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \sin A\sin B\sin C \ge \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A$$

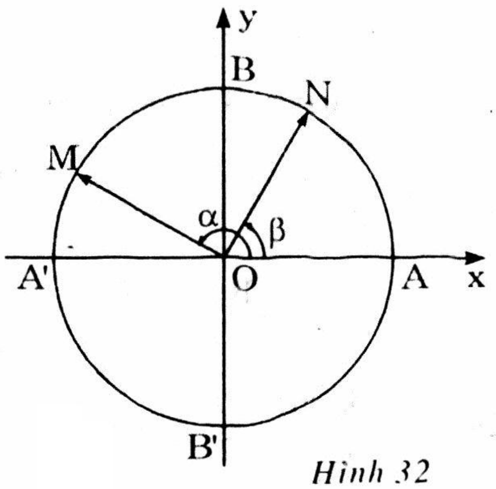
$$1 \ge \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

285. $B = \dfrac{2\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha}$, chia cả tử và mẫu thức cho $\cos\alpha$ $(\cos\alpha \ne 0)$ ta có

$$B = \frac{\dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 2} = \frac{2\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 2}$$

$$B = \frac{2.\dfrac{1}{5} - 1}{\dfrac{1}{5} + 2} = \frac{-\dfrac{3}{5}}{\dfrac{11}{5}} = -\frac{3}{11}$$



Hình 32

286. Trên đường tròn lượng giác (h.32) đặt cung $\overset{\frown}{AM}$ có số đo là α, cung $\overset{\frown}{AN}$ có số đo là β. Ta có toạ độ của hai vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ là

$\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha)$

$\overrightarrow{ON} = (\cos\beta\ ;\ \sin\beta)$

Như vậy góc của hai vectơ $\left(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}\right) = \alpha - \beta + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$$\cos\left(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}\right) = \cos(\alpha - \beta)$$

Ta lại có : $\cos\left(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}\right) = \dfrac{\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM}}{ON.OM} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

(Điều này ta sẽ biết trong hình học 10 : $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM}$ gọi là tích vô hướng của hai vectơ, ta có hệ thức : $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{ON}\right|.\left|\overrightarrow{OM}\right|.\cos\left(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}\right)$ nên

$$\cos\left(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}\right) = \frac{\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{ON}\right|.\left|\overrightarrow{OM}\right|} = \frac{\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM}}{ON.OM}.$$

Mặt khác nếu $\overrightarrow{ON} = (\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha)$, $\overrightarrow{OM} = (\cos\beta\ ;\ \sin\beta)$

thì tích vô hướng $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$).

- Do đó $\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$

Các công thức khác HS tự làm.

287. a) $\cos2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha.\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Dễ dàng có $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

b) $\sin2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

c) $\tan2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

288. $\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow 2\cos^2\alpha = 1 + \cos2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos2\alpha}{2}$

Tương tự $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos2\alpha}{2}$

289. a) $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$, chia cả tử và mẫu thức cho $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

ta có : $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{2t}{1 + t^2}$

Tương tự $\cos\alpha = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$

$\tan\alpha = \dfrac{2t}{1 - t^2}$

290. Biến đổi vế trái ta có :

$$\frac{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}{1 - \tan^2\alpha\tan^2\beta} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}.\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \tan(\alpha + \beta).\tan(\alpha - \beta)$$

VT = VP đẳng thức được chứng minh

291. $\sin 2a = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2a = -\frac{3}{5}\left(180^o < 2a < 270^o\right)$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos a = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\left(90^o < a < 135^o\right)$$

$$\sin 2a = -\frac{4}{5} \Rightarrow 2\sin a\cos a = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sin a = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan a = \frac{\sqrt{5}}{5} : -\frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{1}{2}$$

$\cot a = -2$

292. a) Biến đổi vế trái

$$\sin a\sin 3a = \sin a\sin(2a + a) = \sin a(\sin 2a\cos a + \cos 2a\sin a)$$

$$= \sin 2a\sin a\cos a + \sin^2 a\cos 2a$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2 2a + \frac{1 - \cos 2a}{2}.\cos 2a$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2 2a + \frac{\cos 2a}{2} - \frac{\cos^2 2a}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2 2a + \frac{1 - 2\sin^2 a}{2} - \frac{1 - \sin^2 2a}{2} = \sin^2 2a - \sin^2 a$$

VT = VP hằng đẳng thức đúng.

b) Sử dụng kết quả câu a) biến đổi vế phải :

$$VP = \sin a\sin 3a + \cos^2 2a\sin^2 a = \sin^2 2a - \sin^2 a + \cos^2 2a\sin^2 a$$

$$= \sin^2 2a - \sin^2 a\left(1 - \cos^2 2a\right) = \sin^2 2a - \sin^2 a\sin^2 2a$$

$$= \sin^2 2a\left(1 - \sin^2 a\right) = \sin^2 2a\cos^2 a$$

VP = VT (đpcm)

c) Biến đổi vế phải :

$$VP = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8} = \frac{1 - 2\sin^2 2x}{8} - \frac{1 - 2\sin^2 x}{2} + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\sin^2 2x - \frac{1}{2} + \sin^2 x + \frac{3}{8} = -\frac{3}{8} - \sin^2 x\cos^2 x + \sin^2 x + \frac{3}{8}$$

$$= \sin^2 x\left(1 - \cos^2 x\right) = \sin^4 x$$

VP = VT (đpcm)

293. a) $A = 2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} \Rightarrow A\sin\frac{\pi}{5} = 2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}$

$A\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{5} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

b) Làm tương tự suy ra $B = \frac{1}{8}$

294. a) $tg^2\frac{\alpha}{2} + 1 = \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$

$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$

b) $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

c) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{5}.\frac{2}{3}} = \frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

295. a) $A = 2\sin(x + y)\cos(x - y) = \sin 2x + \sin 2y$

b) $B = 2\cos(x + y)\cos(x - y) = \cos 2x + \cos 2y$

c) $C = 4\sin 3a\sin 2a\sin a = -2\sin 2a(\cos 4a - \cos 2a)$

$= -2\cos 4a\sin 2a + 2\sin 2a\cos 2a$

$= -(\sin 6a - \sin 2a) + \sin 4a = -\sin 6a + \sin 4a + \sin 2a$

d) $D = 4\sin 3a\sin 2a\cos a = 2(\sin 4a + \sin 2a)\sin 2a$

$= 2\sin 4a\sin 2a + 2\sin^2 2a = -(\cos 6a - \cos 2a) + 1 - \cos 4a$

$= -\cos 6a - \cos 4a + \cos 2a + 1$

296. a) $A = \sin 75^o\sin 15^o = \frac{1}{2}\left(\cos 60^o - \cos 90^o\right) = \frac{1}{4}$

b) $B = \frac{1}{2\sin 10^o} - 2\sin 70^o = \frac{1 - 4\sin 70^o\sin 10^o}{2\sin 10^o} = \frac{1 + 2(\cos 80^o - \cos 60^o)}{2\sin 10^o}$

$= \frac{1 + 2\cos 80^o - 1}{2\sin 10^o} = \frac{2\sin 10^o}{2\sin 10^o} = 1$

c) $C = \sin\frac{\text{[illegible]}}{24}\sin\frac{3\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} = \left(\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}\right)\left(\sin\frac{3\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{10\pi}{24} - \cos\frac{12\pi}{24}\right).\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{24} - \cos\frac{10\pi}{24}\right)$

$$C = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} - 0\right).\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\frac{5\pi}{12}\right) \qquad (*)$$

Ta biết $\frac{5\pi}{12} = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$

$$= \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Thay vào (*) ta có :

$$C = \frac{1}{4}.\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{32}\left(3\sqrt{2} + \sqrt{3} - 4 - \sqrt{6}\right)$$

d) $D = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = \frac{2\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} \times \left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$= \frac{\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\right) + \left(\sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$D = \frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}$$

297. Biến đổi vế trái

$$VT = \cos 12^o + \cos 18^o - 4\cos 15^o\cos 21^o\cos 24^o$$

$$= \cos 12^o + \cos 18^o - 2\cos 15^o(\cos 45^o + \cos 3^o)$$

$$= \cos 12^o + \cos 18^o - 2\cos 15^o\cos 45^o - 2\cos 15^o\cos 3^o$$

$$= \cos 12^o + \cos 18^o - \cos 60^o - \cos 30^o - \cos 18^o - \cos 12^o$$

$$= -\cos 60^o - \cos 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2} = \text{VP (đpcm)}$$

298. a) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha}{2\cos 2\alpha\cos\alpha} = \tan 2\alpha$

b) $\frac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{-2\sin 3\alpha\sin\alpha}{2\sin 3\alpha\cos\alpha} = -\tan\alpha$

c) $\frac{\sin\alpha - 3\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 3\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha - 3\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha\cos\alpha - 3\cos 2\alpha}$

$$= \frac{\sin 2\alpha(2\cos\alpha - 3)}{\cos 2\alpha(2\cos\alpha - 3)} = \tan 2\alpha.$$

299. a) Biến đổi VT : $S \times 2\sin\frac{a}{2} = 2\sin\frac{a}{2}\sin a + 2\sin\frac{a}{2}\sin 2a + ... + 2\sin\frac{a}{2}\sin na$

$$= \left(\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{3a}{2}\right) + \left(\cos\frac{3a}{2} - \cos\frac{5a}{2}\right) + ... + \left(\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)a - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)a\right)$$

$$= \cos\frac{a}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)a = 2\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}$$

Vậy $S = \dfrac{\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} =$ VP (đpcm)

b) Làm tương tự như a) ta có $P = \dfrac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} =$ VP

300. Trước tiên chứng minh : $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$ (1)

Thật vậy (1) $\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C \le \frac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow \cos^2 C - 2\cos C.\frac{1}{2}\cos(A - B) + \frac{1}{4} \ge 0$$

$$\left[\cos C - \frac{1}{2}\cos(A - B)\right]^2 + \frac{1}{4}\sin^2(A - B) \ge 0 \qquad (2)$$

(2) luôn đúng suy ra (1) đúng.

Từ (1) suy ra $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \ge \frac{3}{4}$ (3)

Từ (1) và (3), ta có : $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4} \le 3\left(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C\right)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos C = \frac{1}{2}\cos(A - B) \\ \sin(A - B) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos C = \frac{1}{2} \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

301. Từ $2b = a + c \Rightarrow 2\sin B = \sin A + \sin C$

$$\Leftrightarrow 2\sin B = 2\sin\frac{A + C}{2}\cos\frac{A - C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A - C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A - C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+C}{2} = \cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} = 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad (*)$$

Chia hai vế của (*) cho $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} \neq 0$ ta có (đpcm)

302. (*) $\Leftrightarrow \dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2A - (1 - \cos 2B)}{2\left(\sin^2 A + \sin^2 B\right)} = \frac{\sin(A-B)}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{\sin(A-B)}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B)\left[\sin^2 C - \sin^2 A - \sin^2 B\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(A-B) = 0 \\ \sin^2 C - \sin^2 A - \sin^2 B = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right.$$

Vậy ΔABC cân hoặc vuông tại C.

303. a) $\sin^6 a + \cos^6 a + 3\sin^2 a\cos^2 a = \left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)\left(\sin^4 a - \sin^2 a\cos^2 a + \sin^4 a\right)$

$$+3\sin^2 a\cos^2 a = \left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)^2 = 1$$

b) $B = \sin^2 a - \cos^2(a-b) + \left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]\cos(a-b) - \cos^2 b =$

$$= \sin^2 a + \cos(a+b)\cos(a-b) - \cos^2 a \qquad (*)$$

Ta có $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a\cos^2 b - \sin^2 a\sin^2 b =$

$$= \cos^2 a\cos^2 b - \left(1 - \cos^2 a\right)\left(1 - \cos^2 b\right)$$

$$= \cos^2 a\cos^2 b - (1 - \cos^2 b - \cos^2 a + \cos^2 a\cos^2 b)$$

$$= \cos^2 a + \cos^2 b - 1 = \cos^2 a - \sin^2 b = -\sin^2 a + \cos^2 b$$

Thay vào (*) ta có: $B = \sin^2 a + \left(-\sin^2 a + \cos^2 b\right) - \cos^2 b = 0$

c) $C = \cos^2 a - \cos(a+b)\cos(a-b) - \sin^2 b$

$$= \cos^2 a - \left(\cos^2 a - \sin^2 b\right) - \sin^2 b = 0$$

304. a) $A = \dfrac{\cos\left(-288^o\right)\cot 72^o}{\tan\left(-162^o\right)\sin 108^o} - \tan 18^o$

$\cos(-288) = \cos 288^o = \cos\left(360^o - 72^o\right) = \cos\left(-72^o\right) = \cos 72^o$

$\tan\left(-162^o\right) = -\tan 162^o = -\tan\left(180^o - 162^o\right) = -\tan\left(-18^o\right) = \tan 18^o$

$\sin 108^o = \sin 72^o$. Thay vào A được

$$A = \frac{\cos 72^o.\cot 72^o}{\tan 18^o.\sin 72^o} - \tan 18^o = \frac{\cot 72^o.\tan 18^o}{\tan 18^o} - \tan 18^o$$

$= \tan 18^o - \tan 18^o = 0$

b) Đặt $B = \dfrac{\sin(x-\pi)\cos(x-2\pi)\sin(2\pi - x)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\cot(\pi - x)\cot\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)} = \dfrac{\sin x\cos x\sin(-x)}{\cos x\cot(-x).-\tan x} = -\sin^2 x$

c) $\sin^2(x-2y) - \cos^2 x - \cos^2 2y =$

$= (\sin x\cos 2y - \cos x\sin 2y)^2 - \cos^2 x - \cos^2 2y$

$= \sin^2 x\cos^2 2y + \cos^2 x\sin^2 2y - \cos^2 x - \cos^2 2y - 2\sin x\cos x\cos 2y\sin 2y$

$= -2\cos^2 x\cos^2 2y - 2\sin x\cos x\cos 2y\sin 2y$

$= -2\cos x\cos 2y(\cos x\cos 2y + \sin x\sin 2y) = -2\cos x\cos 2y\cos(x-2y)$

d) Áp dụng c) ta có

$$\frac{\sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2(a+b) - \cos^2 a - \cos^2 b} = \frac{-2\sin a\sin b\cos(a-b)}{-2\cos a\cos b\cos(a-b)} = \tan a\tan b$$

305. a) $P = \sin^2 50^o + \sin^2 70^o - \cos 50^o\cos 70^o =$

$$= \frac{1-\cos 100^o}{2} + \frac{1-\cos 140^o}{2} - \frac{\cos 120^o + \cos 20^o}{2}$$

$$= \frac{2 - (\cos 100^o + \cos 140^o) - (\cos 120^o + \cos 20^o)}{2}$$

$$= \frac{2 - 2\cos 120^o\cos 20^o - \cos 120^o - \cos 20^o}{2}$$

$$= \frac{2 + \cos 20^o + \dfrac{1}{2} - \cos 20^o}{2} = \frac{5}{4}$$

b) $Q = \tan 20^o + \tan 40^o + \sqrt{3}\tan 20^o\tan 40^o$

$$= \frac{\sin 60^o}{\cos 20^o\cos 40^o} + \frac{\sqrt{3}\left[\dfrac{1}{2}\left(\cos 20^o - \cos 60^o\right)\right]}{\cos 20^o\cos 40^o},$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\cos 20^{\circ}\cos 40^{\circ}} + \frac{\sqrt{3}\left(\cos 20^{\circ} - \frac{1}{2}\right)}{2\cos 20^{\circ}\cos 40^{\circ}} = \frac{\sqrt{3}\left(1 + \cos 20^{\circ} - \frac{1}{2}\right)}{2\cos 20^{\circ}\cos 40^{\circ}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \cos 20^{\circ}\right)}{\cos 60^{\circ} + \cos 20^{\circ}} = \frac{\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \cos 20^{\circ}\right)}{\frac{1}{2} + \cos 20^{\circ}} = \sqrt{3}$$

c) $R = \sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10} - \sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{7\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{5} - \cos\pi\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\pi\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{5} + \cos\pi + \cos\frac{2\pi}{5} - \cos\pi\right) = 0$$

d) $S = \frac{1 + \cos 2a}{2} + \frac{1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2a\right)}{2} + \frac{1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2a\right)}{2}$

$$= \frac{3 + \cos 2a + 2\cos\frac{4\pi}{3}\cos 2a}{2} = \frac{3 + \cos 2a - \cos 2a}{2} = \frac{3}{2}.$$

306. a) Biến đổi vế trái :

$$\frac{1 - 2\sin^2\alpha}{2\cot\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha}{2\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}.\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 1$$

b) Biến đổi vế phải

$$\frac{1 - \tan\beta}{1 + \tan\beta} = \frac{\cos\beta - \sin\beta}{\cos\beta + \sin\beta} = \frac{(\cos\beta - \sin\beta)(\cos\beta + \sin\beta)}{(\cos\beta + \sin\beta)^2} = \frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{1 + \sin 2\beta}$$

$$= \frac{1 - 2\sin^2\beta}{1 + \sin 2\beta} = \text{VT (đpcm)}$$

c) Biến đổi vế phải

$$\frac{\sin^4\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^4\alpha}{\tan 2\alpha - 1} = \frac{\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right) + \sin 2\alpha}{\frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}}$$

$$= \frac{(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha} = \cos 2\alpha = \text{VT (đpcm)}$$

d) Biến đổi vế trái

$$8\left(\sin^8\frac{\alpha}{2} + \cos^8\frac{\alpha}{2}\right) = 8\left[\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)^4 + \left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)^4\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big(1 - 4\cos\alpha + 6\cos^2\alpha - 4\cos^3\alpha + \cos^4\alpha + 1 + 4\cos\alpha +$$

$$+ 6\cos^2\alpha + 4\cos^3\alpha + \cos^4\alpha\Big)$$

$$= 1 + 6\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = \text{(VT) (đpcm)}.$$

307. a) $\tan x + \cot x = k \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x + 2\tan x\cot x = k^2$

$$\Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x + 2 = k^2$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = k^2 - 2 \ (k < -\sqrt{2} \text{ hoặc } k > \sqrt{2})$$

b) $(\tan x - \cot x)^2 = \tan^2 x + \cot^2 x - 2\tan x\cot x$

$$= k^2 - 2 - 2 = k^2 - 4$$

$\tan x - \cot x = \pm\sqrt{k^2 - 4}$ (Điều kiện $k > 2$ hoặc $k < -2$)

c) $\tan^3 x + \cot^3 x = (\tan x + \cot x)\left(\tan^2 x + \cot^2 x - 1\right)$

$$= k\left(k^2 - 2 - 1\right) = k\left(k^2 - 3\right)$$

308. $\dfrac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \dfrac{m}{n}$. Ta có : $\dfrac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \dfrac{\cos x\cos y - \sin x\sin y}{\cos x\cos y + \sin x\sin y}$

Chia cả tử và mẫu cho $\cos x\cos y \neq 0$ ta có :

$$\frac{1 - \tan x\tan y}{1 + \tan x\tan y} = \frac{m}{n} \Rightarrow \tan x\tan y = \frac{n-m}{n+m}$$

309. $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}4$. Đặt $\tan\dfrac{\alpha}{2} = t$, ta có

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1{,}4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} \approx 26^o34' \text{ (bị loại)} \\ t = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} \approx 16^o42' \text{ (chấp nhận)} \end{array}\right.$$

(do $0^o < \dfrac{\alpha}{2} < 22{,}5^o$)

Vậy $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{3}$.

310. Theo giả thiết α, β, γ là ba góc nhọn dương, nên $0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3\pi}{2}$,

$0 < \frac{\beta + \gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} < 1$

$$\tan\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}}{1 - \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{\frac{1}{3}\cot\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{3\tan\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}}}{1 - \frac{1}{3}\cot\frac{\alpha}{2}\frac{2}{3\tan\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}}} = \cot\frac{\alpha}{2}$$

Vậy $\tan\frac{\beta+\gamma}{2} - \cot\frac{\alpha}{2} = 0$ suy ra $\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} = 0$

$\Rightarrow -\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$. Do $0 < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} < \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$

311. $y = 12\sin x + 5\cos x + 1 \Rightarrow y - 1 = 12\sin x + 5\cos x$

Theo bài 272, ta có : $(12\sin x + 5\cos x)^2 \le \left(12^2 + 5^2\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$

$$|12\sin x + 5\cos x| \le 13$$

Vậy $|y - 1| \le 13 \Leftrightarrow -13 \le y - 1 \le 13 \Leftrightarrow -12 \le y \le 14$.

GTLN $y = 14$, GTNN $y = -12$

312. Tương tự ta có

a) GTLN $(k\cos x + \sin x) = \sqrt{k^2 + 1} = 7$

$\sqrt{k^2 + 1} = 7 \Leftrightarrow k^2 = 48 \Leftrightarrow k = \pm 4\sqrt{3}$.

b) GTNN $(k\cos x + 2\sin x) = -\sqrt{k^2 + 4} = -5 \Leftrightarrow k^2 + 4 = 25$.

$k^2 = 21 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{21}$

313. a) Ta biết ΔABC có $A + B + C = \pi \Rightarrow A + B = \pi - C$.

Do đó $\sin C = \sin(A + B)$, $\cos C = -\cos(A + B)$

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2\sin(A + B)\cos(A - B) + 2\sin C\cos C \\ &= 2\sin C(\cos(A - B) - \cos(A + B)) \\ &= 2\sin C.(-2\sin A\sin(-B)) = 4\sin A\sin B\sin C \end{aligned}$$

b) Gọi a, b, c theo thứ tự là các cạnh đối diện với các góc A, B, C của ΔABC, ta có $S = \frac{abc}{4R}$

Ta lại có : $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ nên

$$S = \frac{8R^3\sin A\sin B\sin C}{4R} = 2R^2\sin A\sin B\sin C$$

Muốn chứng minh $S = \frac{R}{2}(a\cos A + b\cos B + c\mathrm{Cos}C)$, ta chứng minh

$$\frac{R}{2}(a\cos A + b\cos B + c\mathrm{Cos}C) = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \quad (*)$$

Biến đổi vế trái của (*) :

$$\frac{R}{2}(a\cos A + b\cos B + c\mathrm{Cos}C) = \frac{R}{2}$$

$$(2R\sin A\cos A + 2R\sin B\cos B + 2R\sin C\cos C)$$

$$= \frac{R}{2}.R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = \frac{R}{2}.R.4\sin A\sin B\sin C$$

$$= 2R^2 \sin A\sin B\sin C \text{ (bằng vế phải) đpcm}$$

c) Ta có : $S = \frac{1}{2}r(a + b + c) \Rightarrow r = \dfrac{2S}{a + b + c}$

$$r = \frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{2R(\sin A + \sin B + \sin C)} = \frac{32R^2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$= 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \text{ (Theo a) và } \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \neq 0)$$

314. a) Gọi M là trung điểm BC

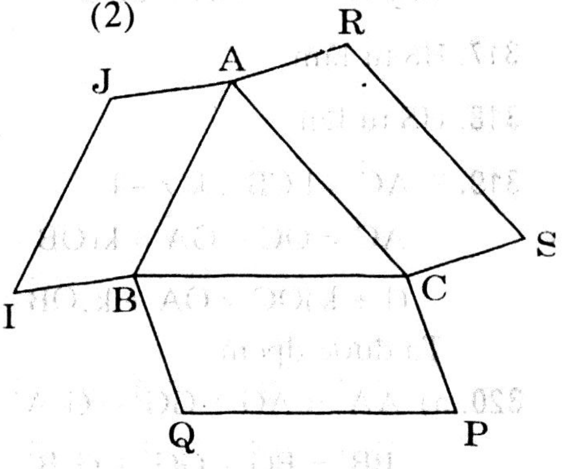
Ta có : $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$ (1)

Mặt khác ta có : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có :

$\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$



Hình 33

b) Gọi G' là trọng tâm ΔABC, ta chứng minh G' ≡ G

Ta có : $\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} = \vec{0}$ (câu 1)

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{G'A} &= \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GA}\\ \overrightarrow{G'B} &= \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GB}\\ \overrightarrow{G'C} &= \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GC}\end{aligned}\right\} \text{ cộng từng vế}$$

$$\underbrace{\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C}}_{\vec{0}} = 3\overrightarrow{G'G} + \underbrace{(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})}_{\vec{0}}$$

Vậy $\overrightarrow{G'G} = \vec{0} \Rightarrow G' \equiv G$ (đpcm)

c), d) HS tự làm.

315. HS tự làm.

316. a) Chứng minh tứ giác BHCD là hình bình hành

$BH = CD$

$\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$ (đpcm)

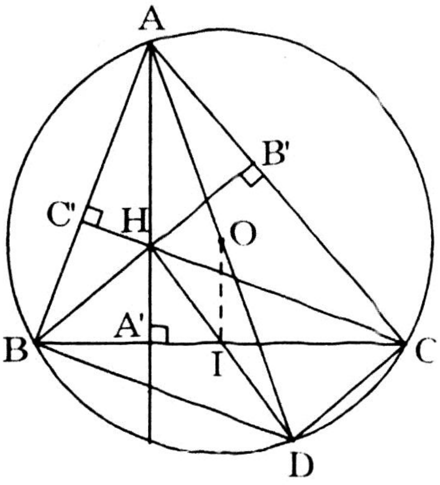
b) Chứng minh I là trung điểm HD - trong Δ AHD ; OI là đường trung bình (đpcm)

$AH = 2OI \Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$

c) Xét Δ HBC ta có : $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$ (1)

Xét Δ AHD ta có : $\overrightarrow{HA} + HD = 2\overrightarrow{HO}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có (đpcm)



Hình 34

d) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}$; $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}$; $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OH} + \underbrace{(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC})}_{2\overrightarrow{HO}}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OH} + 2\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{OH} - 2\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OH} \text{ (đpcm)}$$

e) Ta có : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$;

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ (câu 4)

Suy ra : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$

317. HS tự làm.

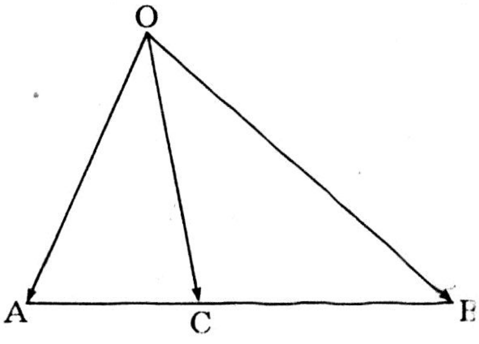
318. HS tự làm

319. * $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$; $k \neq -1$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$

$(1 + k)\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + k.\overrightarrow{OB}$

Ta được đpcm



Hình 35

320. a) $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}$ (1)

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}$ (2)

$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}$ (3)

Cộng từng vế của (1), (2), (3) ⇒ Kết quả

b) G là trọng tâm ΔABC ; G' là trọng tâm ΔA'B'C'

Ta chứng minh : $G \equiv G' \Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \vec{0}$

Ta có : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{GA'} - \overrightarrow{GA}$ (1)

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{GB'} - \overrightarrow{GB}$ (2)

$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{GC'} - \overrightarrow{GC}$ (3)

Cộng từng vế (1), (2), (3) ⇒ Kết quả.

c) Giả sử O là điểm bất kỳ

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}) \qquad (2)$$

Xem bài tập 1 – câu 3

$$\underbrace{\overrightarrow{OG'} - \overrightarrow{OG}}_{\overrightarrow{GG'}} = \frac{1}{3}(\underbrace{\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}}_{\overrightarrow{AA'}} + \underbrace{\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB}}_{\overrightarrow{BB'}} + \underbrace{\overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OC}}_{\overrightarrow{CC'}})$$

⇒ Điều phải chứng minh.

Chú ý : Nếu $G \equiv G' \Rightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

d) (xem chứng minh bài 319)

Chú ý rằng :

Nếu $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$. Với $k \neq -1$ và O là một điểm tuỳ ý thì

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1 + k} \qquad (*)$$

Áp dụng công thức (*) : $\overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{C_1B} \Leftrightarrow \overrightarrow{C_1A} = -k\overrightarrow{C_1B}$

Từ đó ta có : $\overrightarrow{GA} = (1 + k)\overrightarrow{GC_1} - k\overrightarrow{GB} \qquad (1)$

$$\overrightarrow{GB} = (1 + k)\overrightarrow{GA_1} - k\overrightarrow{GC} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{GC} = (1 + k)\overrightarrow{GB_1} - k\overrightarrow{GA} \qquad (3)$$

Cộng từng vế của (1) ; (2) ; (3)

Ta được : $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = \vec{0}$

Vậy G cũng là trọng tâm của $\Delta A_1B_1C_1$.

321. a) Độc giả tự chứng minh

b) Ta có : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI} \qquad (1)$

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

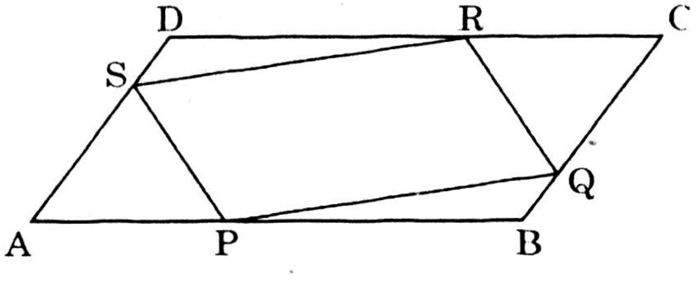
c) Ta có :

$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BQ} = k\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{PB} = (1 - k)\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = (1 - k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} \qquad (3)$



Hình 36

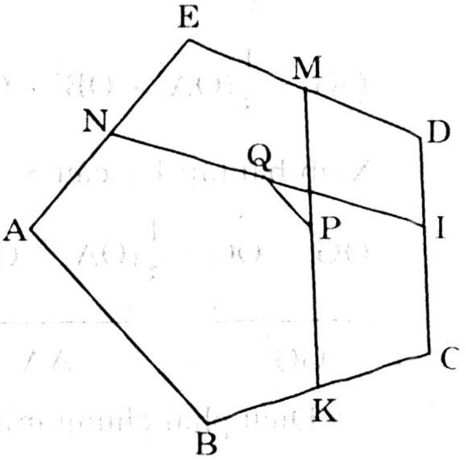
Tương tự ta có:

$\overrightarrow{SR} = (1-k)\overrightarrow{DC} - k\overrightarrow{AD}$ (4)

Vì tứ giác ABCD là hình bình hành nên : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

Từ (3) và (4) ta có : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

Vậy tứ giác PQRS là hình bình hành (đpcm).



Hình 37

322. a) Gọi S là điểm tuỳ ý

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SQ} - \overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{SN}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{SK} + \overrightarrow{SM})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SE})\right] -$$

$$- \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SE})\right]$$

Khai triển và rút gọn ta được :

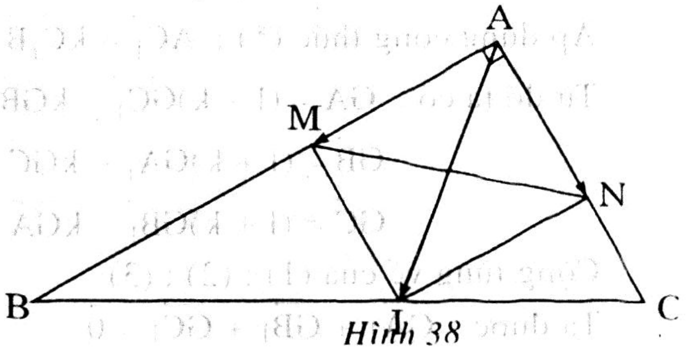
$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \qquad (*)$$

Từ đó chứng tỏ : PQ//AB

b) Từ (*) suy ra : $PQ = \frac{1}{4}AB$ hay $\frac{PQ}{AB} = \frac{1}{4}$

323. a) $\overrightarrow{IB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{IC}$

Từ đó xác định được điểm I.



Hình 38

b) Từ (1) $\Rightarrow 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

* $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}$

* $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}$

Từ (2) ta có :

$2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AI} = \vec{0}$

hay : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

c) * Dựng $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

* $AM = \frac{2}{5}AB \Rightarrow AM = 4$

* $AN = \frac{3}{5}AC \Rightarrow AN = 3$

* $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$ mà $\widehat{A} = 90^o \Rightarrow$ tứ giác AMIN là hình chữ nhật

$\Rightarrow AI = MN$.

* Xét tam giác vuông AMN ta có : $MN^2 = AM^2 + AN^2 \Rightarrow MN = 5$

324, 325, 326, 327. HS tự làm.

328. Từ giả thiết có : $\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{CP} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QB} + 3\overrightarrow{QC} = \vec{0} \quad (2)$$

Cộng từng vế (1) và (2)

$$\underbrace{(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AP})} + 2\overrightarrow{QB} + 3(\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CP}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{QP} \qquad + 2\overrightarrow{QB} + 3\overrightarrow{QP} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{QB} + 4\overrightarrow{QP} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{QB} = -2\overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{PQ}$$

Vậy Q, B, P thẳng hàng.

329. HS tự chứng minh.

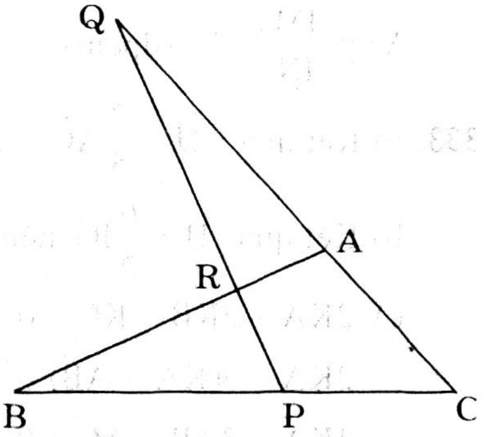
330. *Chú ý* : Q thuộc tia CA

* $\overrightarrow{QP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{18}{7}\overrightarrow{AC}$

* $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

* $\overrightarrow{QP} = \frac{9}{7}\overrightarrow{QR}$

Vậy P, Q, R thẳng hàng.



Hình 39

331. HS tự chứng minh.

332. a) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} \qquad (1)$

$\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \qquad (2)$

Từ (1) $\Rightarrow 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} = \vec{0} \qquad (3)$

Từ (2) $\Rightarrow x\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CB} = \vec{0} \qquad (4)$

Từ (3) $\Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}. \qquad (5)$

Từ (4) $\Rightarrow x\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \qquad (6)$$

Để A, M, N thẳng hàng thì $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$ phải cùng phương

Suy ra : $\frac{x}{1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$

Vậy $x = -\frac{1}{2}$ thì 3 điểm A, M, N thẳng hàng.

b) I là trung điểm BC $\Rightarrow \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{IB}$

Từ (3) ta có : $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$

$$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} - 2\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IC}$$

$$= 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC}$$

Mặt khác từ giả thiết : $x\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ theo (4)

$\Leftrightarrow x(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{BN} = \vec{0} \Leftrightarrow x(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + x\overrightarrow{IC} - x\overrightarrow{IA}$ (*)

Mà $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IC} \Rightarrow \overrightarrow{IN} = -\overrightarrow{IC} + x\overrightarrow{IC} - x\overrightarrow{IA} = -x\overrightarrow{IA} + (x-1)\overrightarrow{IC}$

c) Để M, I, N thẳng hàng, ta phải có : $-\dfrac{x}{2} = \dfrac{x-1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2}{5}$

* Với $x = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = -5\overrightarrow{IN}$

Vậy $\dfrac{IM}{IN} = 5$ (đpcm)

333. a) Kết quả : $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$

b) Kết quả $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{6}{5}\overrightarrow{IG}$ nên I, G, J thẳng hàng.

c) $2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{KA} + 3(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC}) = \vec{0}$

$4\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{KA} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB})$

Điểm K được hoàn toàn xác định. Do A cố định ⇒ K cố định.

d) $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MK} \Rightarrow$ M, N, K thẳng hàng.

334. a) $\underbrace{\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ (độc giả tự kết luận)

b) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ (1)

Gọi I là trung điểm AB.

$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = 2\overrightarrow{NI}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $2\overrightarrow{NI} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{NC}$

N là trung điểm của IC.

c) $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} - (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BA}$

Vậy I là điểm đối xứng của B qua A.

d) $2\overrightarrow{KA} + \underbrace{\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC}} = \overrightarrow{AB}$

$2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow 2\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{KA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

335. a) $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = \vec{0}$ (làm như câu 3)

- Ta có $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

b) $\underbrace{\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}} = \overrightarrow{BC}$

$$3\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{HG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

(G là trọng tâm ΔABC)

c) $\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QB} + 3\overrightarrow{QC} = 3\overrightarrow{QG}$

$\Leftrightarrow$ Gọi G là trọng tâm ΔABC

$\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC} = 3\overrightarrow{QG}$

$3\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC} = 3\overrightarrow{QG} \Rightarrow \overrightarrow{QB} = -2\overrightarrow{QC}$

d) $3\overrightarrow{RA} - 2\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $2(\overrightarrow{RA} - \overrightarrow{RB}) + (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RC}) = \vec{0}$

$2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{RI} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{RI} = \overrightarrow{AB}$ với I là trung điểm AC.

336. Giả sử có hai điểm M và M' cùng thoả mãn hệ thức :

$\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (1)

Ta chứng minh M ≡ M'

Giải : $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (2)

$\overrightarrow{M'A} + 4\overrightarrow{M'B} - 3\overrightarrow{M'C} = \vec{0}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có : $(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A}) + 4(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'B}) - 3(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'C}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $2\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A} + 4\overrightarrow{M'C} - 3\overrightarrow{M'C} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MM'} = 0$ $\Leftrightarrow$ M ≡ M' (đpcm)

337. a) $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB})$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{IA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Vậy I là điểm duy nhất.

b) Chứng minh rằng MN đi qua I

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 3\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB})$

$\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MI}$

Vậy M, I, N thẳng hàng, nên MN đi qua I.

338. HS tự làm.

339. a) $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ (1)

$\Leftrightarrow$ $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $(\alpha + \beta)\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AI} = \dfrac{\beta}{(\alpha + \beta)}\overrightarrow{AB}$ do $(\alpha + \beta) \neq 0$

nên tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn điều kiện (1).

b) $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI}$

$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$

$$= (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI} + \underbrace{\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}$$

Vậy $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI}$

(có thể áp dụng công thức thu gọn).

340. a) Vì G là trọng tâm ΔABC nên ta có:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (1)

Ta có : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{MI}$

$$\underbrace{3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{MD}}_{3(2\overrightarrow{MI})} = k\overrightarrow{MI}$$

$3(2\overrightarrow{MI}) = k\overrightarrow{MI}$

(với I là trung điểm DG)

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{MI}$ (k = 6)

b) Gọi I là điểm xác định bởi : $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Áp dụng công thức rút gọn ta được :

$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = (2 + 1 - 1)\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MI}$ (k = 2)

c) Gọi I là điểm cố định sao cho : $4\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $4\overrightarrow{IA} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \quad 6\overrightarrow{IA} + \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{AC}} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

Theo công thức rút gọn ta được :

$4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = (4 + 1 + 1)\overrightarrow{MI} = 6\overrightarrow{MI}$ (k = 6)

341. HS tự làm.

342. HS tự làm.

343. a) HS tự làm.

b) $\overrightarrow{MA} + (1 - k)\overrightarrow{MB} + (1 + k)\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = k(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = k\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{GM} = k\overrightarrow{CB}$

(với G là trọng tâm ΔABC)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = \frac{k}{3}\overrightarrow{BC}$

G cố định, BC cố định, do đó tập hợp các điểm M là đường thẳng qua G song song với BC.

c) $\overrightarrow{MA} + (1 - k)\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (1)

Gọi I là trung điểm AB

J là trung điểm AC

(1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} = 2k\overrightarrow{MJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MJ}$

I, J cố định, vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng qua IJ (trừ điểm J).

344. *Hướng dẫn giải :*

a) Gọi I là trung điểm AB

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \text{ và } \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$$

(1) $\Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow IM = \frac{1}{2}BC$

* I cố định, BC không đổi. Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I ; $R = \frac{1}{2}BC$

b) * Gọi G là trọng tâm ΔABC

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

* Gọi I là điểm cố định xác định bởi

$$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

* Ta có : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$

(2) $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MI} \Rightarrow \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MI} \Leftrightarrow MG = MI$.

I, G cố định, M cách đều I, G, vậy M thuộc trung trực của GI.

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ (1)

Vì $\overrightarrow{CB}$ cố định, dựng $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB}$

(1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{MK}$ (K cố định) (2)

Mặt khác :

$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (3)

Từ (2) và (3) ta có : $|\overrightarrow{MK}| = -|(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ = không đổi

* K cố định và $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ = không đổi. Do đó M thuộc đường tròn tâm K, bán kính bằng $\frac{1}{2}AD$ với $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}|$

(Trong đó AD là đường chéo hình bình hành ABDC).

d) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|$

Gọi I là trung điểm AB

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$; I cố định

$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=2|\overrightarrow{MI}|$

* $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$

$|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{BA}|$ = không đổi

$|\overrightarrow{MI}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}| \Rightarrow MI=\frac{1}{2}AB$

I cố định, AB không đổi. Vậy M thuộc đường tròn tâm I, bán kính $R=\frac{1}{2}AB$

345. HS tự làm.

346. $|\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}|=m>0$ (1)

Ta có : $|\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}|=4\overrightarrow{KO}$

(1) $\Leftrightarrow$ $4|\overrightarrow{KO}|=m \Rightarrow KO=\frac{m}{4}>0$

O cố định. Vậy tập hợp K là đường tròn tâm O, bán kính $R=\frac{m}{4}$.

347. a) HS tự làm.

b) Gọi G là trọng tâm ΔABC

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

Từ giả thiết : $6|\overrightarrow{MJ}|=6|\overrightarrow{MG}|$

$\Rightarrow$ $MJ=MG$

J, G cố định. Vậy tập hợp M là trung trực của JG.

348. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=8a^2$ (a > 0 cho trước)

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})$ (*)

Với O là trung điểm của AB

(*) $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA})=8a^2$

$\Leftrightarrow$ $MO^2-OA^2=8a^2$

$\Leftrightarrow$ $MO^2=9a^2$ do $OA=a$

$\Leftrightarrow$ $MO=3a$

Vậy tập hợp M là đường tròn tâm O, bán kính R = 3a.

349. Tập hợp M là đường tròn đường kính IJ (I, J cố định cho trước).

350. Tập hợp điểm M là đường thẳng qua C và vuông góc với AB.

351. a) Tập hợp M là đường thẳng qua A và vuông góc với BC.

b) Tập hợp M là đường tròn đường kính AG (do A, G cố định).

c) Tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với AI tại H.

Từ bài 352 – 361 HS tự làm.

362. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -\dfrac{3a^2}{2}$

b) $\overrightarrow{AB}(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{AB}^2 - 3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2a^2 - \dfrac{3a^2}{2} = \dfrac{a^2}{2}$

c) $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AK} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{5}{8}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

* $\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{AN} = \dfrac{a^2}{3} + \dfrac{5}{24}a^2 - \dfrac{1}{12}a^2 + \dfrac{5a^2}{24} = 0$

* $\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow$ MK vuông góc AN.

363. a), b), c), d), e) HS tự làm.

f) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}$ AB.AC.sinA.

$S^2_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{4}\ AB^2\ .\ AC^2\ .\ \sin^2 A.$

$= \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2(1 - \cos^2 A) = \dfrac{1}{4}[\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.\cos A)^2]$

$S^2_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{4}[\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2]$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$

364. HS tự làm.

365. a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Kết quả $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{PN} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \dfrac{3x}{a}\overrightarrow{AB})$

c) AM vuông góc PN $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{PN} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{14}{15}\ a$

d) Trong tam giác ABC đều thì tâm O trùng với trọng tâm G, nên :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

Phân tích : $\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OA}$ (1)

$\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OB}$ (2)

$\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OC}$ (3)

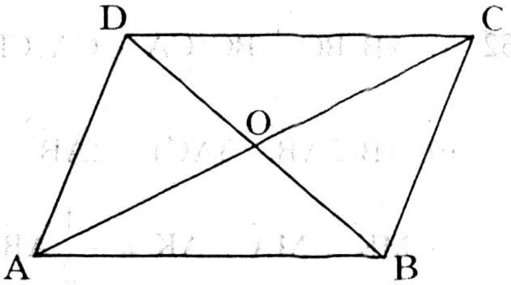
Bình phương từng vế của (1), (2), (3) và cộng từng vế, ta được kết quả.

366. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}$

b) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -\frac{3}{2}$

c) * $\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})^2 = 7$

$\overrightarrow{AC} = \sqrt{7}$



Hình 40

* $\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2 = AD^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 1$

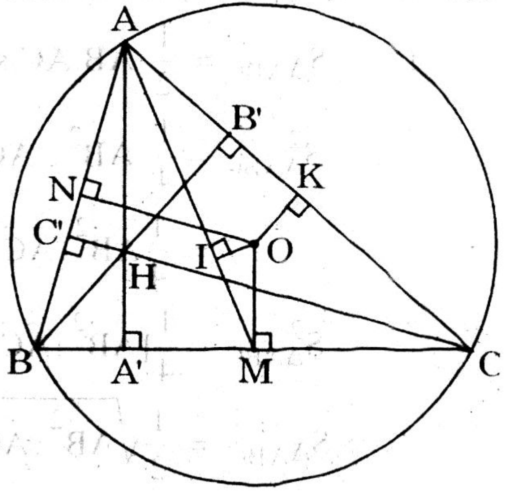
BD = 1

d) $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \dfrac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}}{AC.BD} = -\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

e) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB})$

$= BC^2 - AB^2 = b^2 - a^2$

367. $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HB'}$



* Hình chiếu của $\overrightarrow{HB}$ lên AA' là $\overrightarrow{HA'}$

* Hình chiếu của $\overrightarrow{HA}$ lên BB' là $\overrightarrow{HB'}$

* $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HA'}$

* $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HB'} \Rightarrow$ đpcm.

b) $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

(Xem phần phép cộng và trừ véc tơ và phép nhân véc tơ với một số).

Hình 41

c) Gọi M, N, K lần lượt là hình chiếu của tâm O lên BC, AB, AC ; để chứng minh H là trực tâm tam giác ABC ta chứng minh AH vuông góc BC.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ (BH vuông góc AC, CH vuông góc AB).

Theo giả thiết $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ (1)

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}$

$\Leftrightarrow$ AH cùng phương $\overrightarrow{OI}$ mà $\overrightarrow{OI}$ vuông góc $\overrightarrow{BC}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}$ vuông góc $\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow$ AH.BC = 0.

Chứng minh tương tự cho các trường hợp còn lại.

$\Rightarrow$ H là trực tâm tam giác ABC.

d) $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AM} = 0 \Rightarrow OH \perp AM$

$$* \ \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AM} = \underbrace{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})}_{\overrightarrow{OH}}.\underbrace{\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})}_{\overrightarrow{AM}} = 0$$

$= (3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = 0$

* $3\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = 0$

$\Leftrightarrow\quad 3\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = 0$

$\Leftrightarrow\quad 3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}\right) = c^2 + b^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}(b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow\quad 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = b^2 + c^2$

$\Leftrightarrow\quad 2\,[AB^2 + AC^2 - (\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC})] = b^2 + c^2$

$\Leftrightarrow\quad 2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2 + c^2 \Leftrightarrow\ b^2 + c^2 = 2a^2$ (đpcm)

368. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$ (1)

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$ (2)

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ (3)

Khai triển (1) ; (2) ; (3) và cộng từng vế của ba đẳng thức ⇒ (đpcm)

b) Giả sử AH và BH là các đường cao của ΔABC ; ta chứng minh : CH cũng là đường cao. Trong biểu thức (*) thay D bằng H ta có :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} + \underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} = 0$

Vậy đường cao thứ ba là CH, cũng đi qua H.

369. a), b), c), d) HS tự làm.

e) * Xuất phát từ : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (1)

Bình phương 2 vế của (1) ⇒ Kết quả

**) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}$ (1)

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB}$ (2)

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC}$ (3)

Bình phương 2 vế của (1) ; (2) ; (3) rồi cộng từng vế cho ta kết quả.

***) $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}$ (1)

$\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}$ (2)

$\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG}$ (3)

Bình phương hai vế của (1) ; (2) ; (3) rồi cộng từng vế của đẳng thức ⇒ (đpcm)

370. Theo giả thiết ta có : $\begin{cases}(\vec{a} + 3\vec{b})(7\vec{a} - 5\vec{b}) = 0 & (1)\\ (\vec{a} - 4\vec{b})(7\vec{a} + 2\vec{b}) = 0 & (2)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}7\vec{a}^2 + 16.\vec{a}.\vec{b} - 15\vec{b}^2 = 0 & (3)\\ 7\vec{a}^2 - 30.\vec{a}.\vec{b} + 8\vec{b} = 0 & (4)\end{cases}$$

Từ (3) và (4) khử a^2 ta được :

$$\vec{a}.\vec{b} = \frac{|\vec{b}|^2}{2} \qquad (5)$$

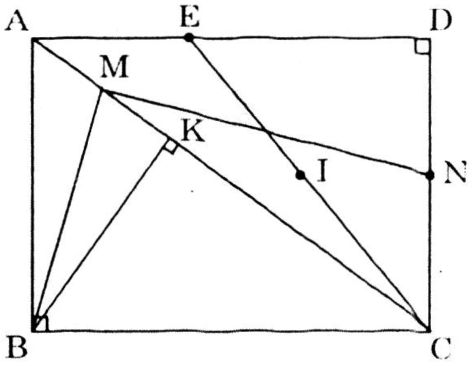
Thay (5) vào (3) $\Rightarrow$ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ (6)

Từ (5) và (6)

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{1}{2}$$

371. HS tự làm.

372. a) Chứng minh : $BM \perp MN$



Hình 42

$$* \ \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BA}) \qquad (1)$$

$$* \ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \qquad (2)$$

$$* \ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BA})\left(\frac{\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BA}}{2} + \overrightarrow{BC} - \frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right) \ (3)$$

Khai triển và rút gọn (3) ta được :

$$* \ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BK}^2 - \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BK}) = 0$$

Vậy $BM \perp MN$ (đpcm)

b) Chứng minh : $BE \perp AI$

* Ta chứng minh : $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AI} = 0$

$$* \ \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$$

$$* \ \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC})$$

$$* \ \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE})(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}^2 + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(-4a^2 + a^2 + 3a^2) = 0 \text{ (đpcm)}$$

Chú ý : Cần áp dụng phép chiếu véc tơ xuống một trục.

373. a) Chứng minh :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$$

$$* \ \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 = AB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \qquad (1)$$

$$* \ \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})^2 = AD^2 + DC^2 + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} \qquad (2)$$

$$* \ \overrightarrow{BD}^2 = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2 = BC^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} \qquad (3)$$

$$* \ \overrightarrow{BD}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})^2 = BA^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} \qquad (4)$$

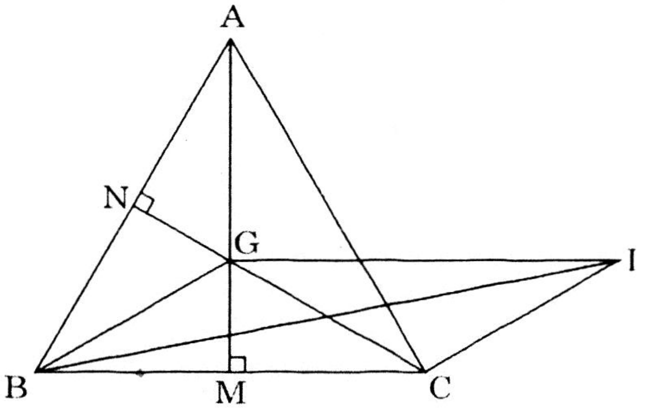
$$* \ 2(AC^2+BD^2) = 2(AB^2+BC^2+CD^2+DA^2)+2\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA})+2\overrightarrow{CD}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA})$$

$$\Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = (AB^2+BC^2+CD^2+DA^2) + \underbrace{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})}_{2\overrightarrow{IJ}}\underbrace{(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA})}_{2\overrightarrow{IJ}}$$

$$\Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = (AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2) - 4IJ^2 \qquad (5)$$

Từ (5) $\Rightarrow$ (đpcm)

b) Để tứ giác ABCD là hình bình hành thì $I \equiv J$ (Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).



Hình 43

374. 1) a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{a^2}{2}$

b) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = 0$ (do $AH \perp BH$)

c) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{AH}|.|\overrightarrow{BA}|\cos(\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BA})$

$= -\dfrac{3}{4}a^2$

2) $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Ta có : $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GI}) - 2(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GI}) + 4(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GI}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GI}$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})}_{\vec{0}} - 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GI}$$

$$3\underbrace{(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB})}_{\overrightarrow{BC}} = 3\overrightarrow{GI}$$

$$3 \quad \overrightarrow{BC} \quad = 3\overrightarrow{GI}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GI}$

Vậy tứ giác BCIG là hình bình hành (đpcm).

375. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = -\dfrac{15}{2}$

b) $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 60^o$

c) HS tự giải.

376. a) Tứ giác ABCD là hình bình hành

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

$*\ (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})^2 = 0$; Ta lại có $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

Nên $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DA} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = 0$. Đpcm.

b) Áp dụng câu 2

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$$

Khi $I \equiv J \Rightarrow IJ = 0$ ta có : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$

(Trong một hình bình hành, tổng bình phương bốn cạnh bằng tổng bình phương hai đường chéo của nó).

c) HS tự giải.

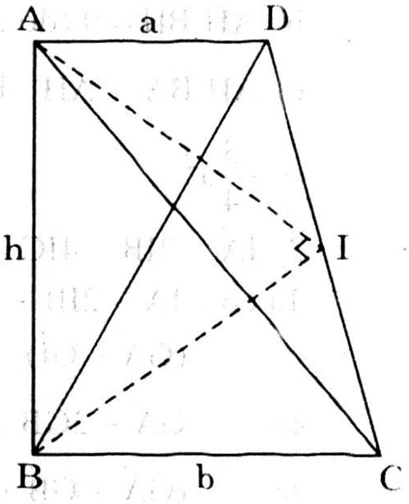
377. a) AC vuông góc BD $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = 0$

$\Leftrightarrow (\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}_{0} - \underbrace{\overrightarrow{AB}^2}_{h^2} + \underbrace{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}}_{ab} - \underbrace{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}}_{0} = 0$

$\Leftrightarrow$ Nếu $h^2 = ab$

Vậy nếu $h^2 = ab$ thì AC vuông góc với BD.



Hình 44

b) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0 \quad (*)$

Chú ý rằng :

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = h^2$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = ab - h^2$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = ab$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD} = a^2$

Từ hệ thức (*) ta có : $a^2 + b^2 - h^2 - ab + ab = 0$

$\Leftrightarrow \quad h^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$

$\Leftrightarrow \quad h = a + b$

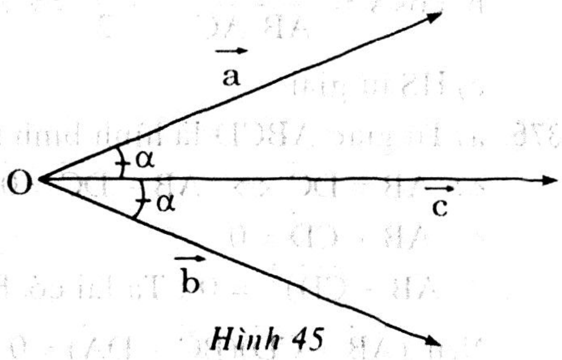
378. a) Mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề sai (xem hình vẽ 45)

c) Mệnh đề đúng

d) Mệnh đề đúng.

(Chỉ cần bình phương 2 vế $\Rightarrow$ kết quả).



Hình 45

e) $\vec{a}(\underbrace{\vec{b}.\vec{c}}_{m}) = (\underbrace{\vec{a}.\vec{b}}_{k}).\vec{c}$

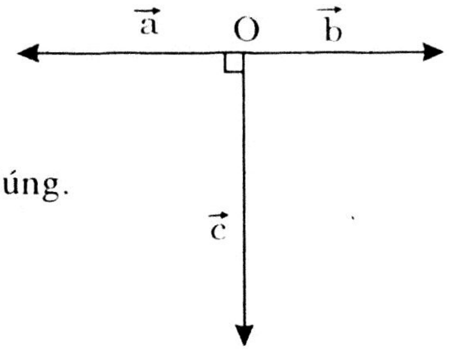
$\vec{a}(\vec{b}.\vec{c}) = m\vec{a}$; $m \in R$

$(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = k\vec{c}$; $k \in R$

*) $\vec{a}$, $\vec{c}$ không cùng phương. $\vec{a}(\vec{b}.\vec{c}) \neq (\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$

**) $m\vec{a} = k\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$ cùng phương thì mệnh đề đúng.

f) Mệnh đề sai (xem hình vẽ 46)

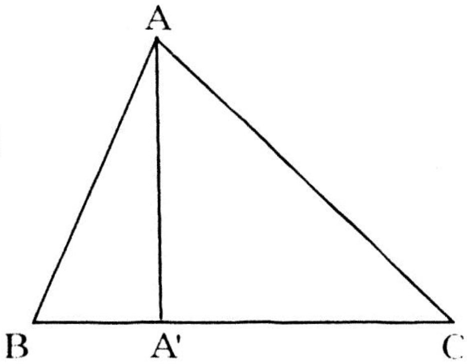


Hình 46

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{b} \\ \vec{b} \perp \vec{c} \\ \vec{a} \neq \vec{b} \end{cases}$$

Nhưng $\vec{a}.\vec{c} = \vec{b}.\vec{c} = 0$

379. a) Xem hình vẽ 47.



Hình 47

Trường hợp 1. ΔABC có 3 góc nhọn (hình 21)

Khi đó A' nằm giữa B và C.

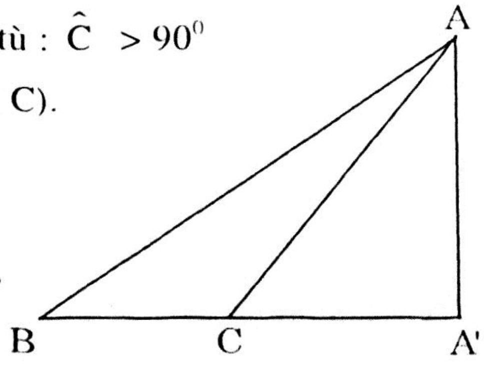
* Ta có A'A = A'B tanB = A'C . tanC.

* $\overrightarrow{A'B}$ và $\overrightarrow{A'C}$ ngược hướng ; tanB, tanC > 0

* Vậy ta có :

$$\tan B.\overrightarrow{A'B} + \tan C.\overrightarrow{A'C} = \vec{0} \qquad (1)$$

Trường hợp 2 : Xem hình 48. ΔABC có góc tù : $\hat{C} > 90^0$



Hình 48

Khi đó A' nằm ngoài đoạn BC (về phía điểm C).

* Ta có : AA' = A'B.tan$\hat{B}$ = A'C.tan$\hat{C}_1$

do $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^o \Rightarrow$

$\tan\hat{C}_1 = -\tan\hat{C}_2 = -\tan\hat{C}$

Vậy AA' = A'B .tgC = – A'C . tg$\hat{C}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{A'B}$; $\overrightarrow{A'C}$ cùng hướng

Do đó : $\tan B\overrightarrow{A'B} + \tan C\overrightarrow{A'C} = \vec{0} \qquad (2)$

Cả 2 trường hợp (1) và (2) cho ta :

$$\tan B\overrightarrow{A'B} + \tan C.\overrightarrow{A'C} = \vec{0} \quad \text{(Đpcm)}$$

b) H là trực tâm ΔABC, ta có các số m, n, k không đồng thời bằng 0 sao cho :

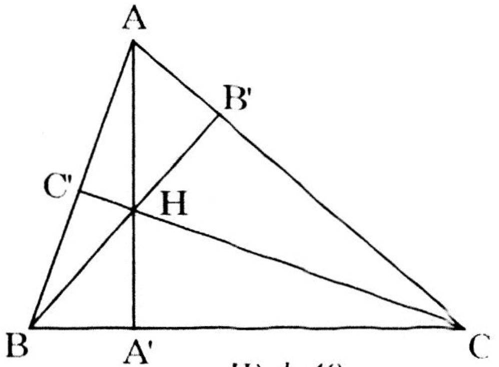
$$m\overrightarrow{HA} + n\overrightarrow{HB} + k\overrightarrow{AC} = \vec{0} \qquad (1)$$

Do AH vuông góc BC, nên từ (1) nhân cả hai vế với $\overrightarrow{BC}$.

$$m.\underbrace{\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}}_{0} + n\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow \quad n\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ (2)

(Xem hình 49)



Hình 49

* Theo công thức hình chiếu ta có :

$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{BC}$ (3)

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{BC}$ (4)

* Từ (2), (3), (4) ta được :

$n\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}(n\overrightarrow{A'B} + k\overrightarrow{A'C}) = \vec{0}$ (5)

Do $\overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$, nên từ (5) suy ra :

$n\overrightarrow{A'B} + k\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$ (6)

* Mặt khác theo câu (1) :

$\tan B.\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}.\tan C = \vec{0}$ (*)

Từ (6) và (*) ta được :

$$\frac{n}{\tan B} = \frac{k}{\tan C}$$

Chứng minh tương tự cho ta :

$$p = \frac{m}{\tan A} = \frac{n}{\tan B} = \frac{k}{\tan C} \qquad (**)$$

$p \neq 0$

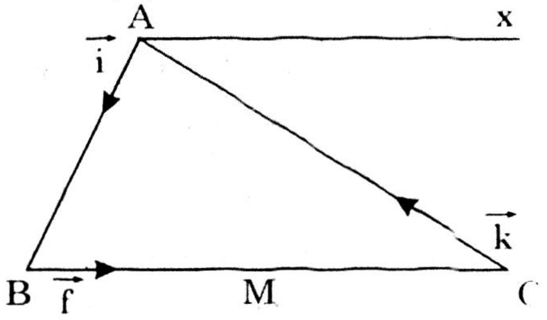
$\Rightarrow \quad m = p\tan A\ ,\ n = p\tan B,\ k = p\tan C$ (7)

Thay (7) vào (1)

$p\tan A.\overrightarrow{HA} + p\tan B.\overrightarrow{HB} + p\tan C.\overrightarrow{HC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad \tan A.\overrightarrow{HA} + \tan B.\overrightarrow{HB} + \tan C.\overrightarrow{HC} = \vec{0}$ (Đpcm)

380. Xem hình 50



Hình 50

a) Trên 3 cạnh AB, BC, CA của ΔABC lần lượt lấy các véctơ $\vec{i}, \vec{f}, \vec{k}$ sao cho $|\vec{i}| = |\vec{f}| = |\vec{k}|$

* Ta có :

$(\vec{i} + \vec{f} + \vec{k})^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad \vec{i}^2 + \vec{f}^2 + \vec{k}^2 + 2(\vec{i}.\vec{f} + \vec{f}.\vec{k} + \vec{k}.\vec{i}) \geq 0$ (1)

Vì $\widehat{ABC} + \widehat{BAx} = 180^o \Rightarrow \cos\widehat{ABC} = -\cos\widehat{BAx}$

* Nên : $\vec{i}.\vec{f} = -\cos\widehat{B}$; tương tự.

$\vec{f}.\vec{k} = -\cos\widehat{C}$

$\vec{k}.\vec{i} = -\cos\widehat{A}$

(1) tương đương với :

$$3 + 2(-\cos A - \cos B - \cos C) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow$ ΔABC đồng dạng với tam giác có các cạnh bằng véc tơ đơn vị $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^{0}$

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

b) *) Gọi M là trung điểm BC

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AM}| = 2AM$$

$$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = BC$$

Trung tuyến $AM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

**) Theo giả thiết : $\vec{u}$ vuông góc $\vec{v}$ ta có :

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = 0 \Rightarrow AB = AC$$

Vậy ΔABC là tam giác cân tại A.

381. a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Vậy tứ giác ABCD là hình bình hành.

b) $\overrightarrow{DB} = m\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = m\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{DC}$

a) Nếu m = 1, tứ giác ABCD là hình bình hành.

b) Nếu $m \neq 0$, $m \neq 1$ thì tứ giác ABCD, theo thứ tự ấy là hình thang.

382. a) Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$

$$* \ \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) \qquad (1)$$

$$* \ \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \qquad (2)$$

$$* \ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \vec{b} - \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{4}(3\vec{b} - \vec{a}) \qquad (3)$$

$$* \ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}(3\vec{a} + \vec{b}) \qquad (4)$$

Ta có : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{16}(3\vec{b} - \vec{a})(3\vec{a} + \vec{b})$

$$= \frac{1}{16}(-3\vec{a}^2 + 3\vec{b}^2 + 8\vec{a}.\vec{b}) = \frac{1}{16}(-3a^2 + 3a^2 + 0) = 0$$

(do $\vec{a}$ vuông góc $\vec{b}$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$). Vậy $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN} = 0$

$\Leftrightarrow$ MB vuông góc MN (5)

$$* \ \overrightarrow{MB}^2 = \frac{1}{16}(3\vec{b} - \vec{a})^2 = \frac{5}{8}a^2$$

$$* \ \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{16}(3\vec{a} + \vec{b}) = \frac{5}{8}a^2$$

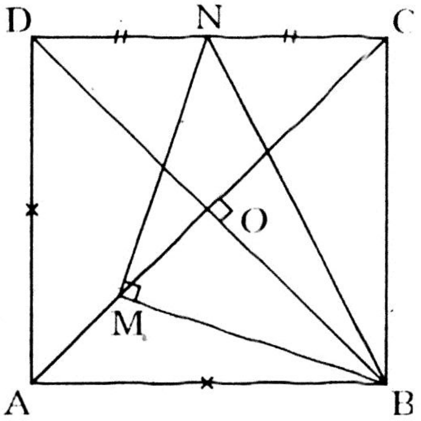
$\Rightarrow$ MB = MN. Vậy ΔBMN vuông cân tại M.

b) $* \ \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}$

$$* \ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}$$

$$* \ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM})(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}) = \frac{5a^2}{16} - \frac{5a^2}{16} = 0$$

Vậy MA vuông góc MN.



Hình 51

383. $* \ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

$$* \ \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \qquad (1)$$

$$* \ \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BF}$$

$$= \overrightarrow{AB} + k(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}) = \overrightarrow{AB} + k\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{k}{2}\right)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD} \qquad (2)$$

* Vì $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AE}$ cùng hướng nên từ (1) và (2) ta có :

$$\frac{1 + \frac{k}{2}}{1} = \frac{k}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow k = \frac{2}{5} \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có : $\overrightarrow{AI} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

* Mặt khác : $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC}$ mà $\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

$$= \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$$

* Gọi a là độ dài cạnh hình vuông :

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CI} = \left(\frac{6}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{6}{25}a^2 - \frac{6}{25}a^2 = 0$$

Chứng tỏ AI $\perp$ CI nên ΔIAC vuông tại I.

384. * Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và BC.

Theo giả thiết

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ a

$\Leftrightarrow\ 2(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ})=\vec{0}$

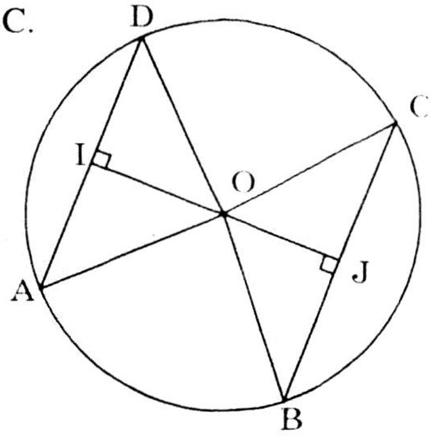
$\Leftrightarrow$ O, I, J thẳng hàng (1)

ΔOAD cân tại O $\Rightarrow$ OI $\perp$ AB (2)

ΔOBC cân tại O $\Rightarrow$ OJ $\perp$ BC (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra : AD // BC

* Tương tự, ta chứng minh được AB // CD



Hình 52

* Vậy tứ giác ABCD nội tiếp được trong đường tròn, nên tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

385. a) Gọi O là giao điểm AC và BD, theo giả thiết ta có :

$$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2$$

* $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2=\frac{1}{2}[(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC})^2+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})^2]=\frac{1}{2}(CA^2+4MO^2)$ (1)

* $\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2=\frac{1}{2}[(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD})^2+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD})^2]=\frac{1}{2}(BD^2+4MO^2)$ (2)

* Mà AC=BD do tứ giác là hình bình hành.

* Từ (1) và (2) : Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau $\Rightarrow$ hình bình hành ABCD là hình chữ nhật (đpcm).

b) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$

Bình phương hai vế và rút gọn ta được :

$\vec{a}.\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}$ vuông góc $\vec{b}$.

Hình bình hành có hai cạnh vuông góc với nhau $\Rightarrow$ là hình chữ nhật.

* *Chú ý* :

Có thể giải cách khác :

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|$$
$$\Leftrightarrow|\overrightarrow{AC}|=|\vec{a}+\vec{b}|$$
$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\Rightarrow|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$$
$$\Leftrightarrow|\overrightarrow{DB}|=|\vec{a}-\vec{b}|$$

Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau nên là hình chữ nhật (đpcm).

c) Ta có : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$

* $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=AD^2-AB^2=b^2-a^2$

* $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=|b^2-a^2|\le AC.BD=m.n$

Vậy $|b^2-a^2|\le m.n$ (đpcm).

386. a) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, x là góc tù nên $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\dfrac{1}{2}$.

$\tan x = -\sqrt{3}$; $\cot x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

b) $\tan(180^0 - x) - \cot(90^0 - x) = 1$. Hai góc bù nhau có sin bằng nhau, cos đối nhau nên $\tan(180^0 - x) = -\tan x$; $\cot(90^0 - x) = \tan x \Rightarrow -2\tan x = 1$

$\Rightarrow \tan x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \cot x = -2$. Khi đó $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \cos x = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Tương tự : $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} \rightarrow \sin^2 x = \dfrac{1}{5} \rightarrow \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Vì tanx < 0 nên sinx và cosx trái dấu nhau

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{TH1: } \sin x = \dfrac{\sqrt{5}}{5};\ \cos x = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5};\ \tan x = -\dfrac{1}{2};\ \cot x = -2 \\ \text{TH2: } \sin x = -\dfrac{\sqrt{5}}{5};\ \cos x = \dfrac{2\sqrt{5}}{5};\ \tan x = -\dfrac{1}{2};\ \cot x = -2 \end{array}\right.$$

387. tanx = 2. Ta có $B = \dfrac{3\sin x + 2\cos x}{\cos x - 3\sin x} = \dfrac{3\tan x + 2}{1 - 3\tan x} = \dfrac{3.2+2}{1\text{-}3.2} = -\dfrac{8}{5}$

và $C = 3\cos^2 x - 4\sin x\cos x + 5\sin^2 x = \cos^2 x(3 - 4\tan x + 5\tan^2 x)$

$= \dfrac{1}{1+\tan^2 x}.(3 - 4\tan x + 5\tan^2 x) = \dfrac{1}{5}(3 - 4.2 + 5.4) = \dfrac{15}{5} = 3$.

388. • D = sinAsinBsinC > 0 vì sinA > 0 ; sinB > 0 ; sinC > 0.

• $E = \cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} > 0$ vì $\cos\dfrac{A}{2} > 0$; $\cos\dfrac{B}{2} > 0$; $\cos\dfrac{C}{2} > 0$.

• F = cosAcosBcosC > 0 ⇔ ΔABC có 3 góc nhọn.

F = cosAcosBcosC < 0 ⇔ ΔABC có 1 góc là tù (hoặc A, hoặc B, hoặc C).

F = cosAcosBcosC = 0 ⇔ ΔABC có 1 góc vuông.

• G = tanAtanBtanC > 0 ⇔ ΔABC có 3 góc nhọn.

G = tanAtanBtanC < 0 ⇔ ΔABC có 1 góc là tù.

389. • Vì $x \in [0 ; 180^0]$ nên $0 \le \sin x \le 1 \Rightarrow A = 3 + 5\sin x \in [3 ; 8]$

• $B = 3 - 2\cos x \in [1 ; 5]$. $B_{max} = 5 \Leftrightarrow x = 180^0$; $B_{min} = 1 \Leftrightarrow x = 0^0$.

• $C = 2\sin x + 3\cos^2 x - 4 = -3\sin^2 x + 2\sin x - 1 = -3t^2 + 2t - 1$ với $t = \sin x$ và $t \in [0 ; 1]$.

• D = 3sinx + 4cosx theo Bunhiacôpski :

$$|3\sin x + 4\cos x| \le \sqrt{(3^2 + 4^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)} = 5$$

Vậy $-5 \le 3\sin x + 4\cos x \le 5$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = \frac{3}{4}$.

Nếu lấy $\sin x < 0$, $\cos x < 0$ thì $D = -5$. Nếu lấy $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ thì $D = 5$.

390. • $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$

$= (\tan x + \cot x + \tan x - \cot x)(\tan x + \cot x - \tan x + \cot x)$

$= (2\tan x)(2\cot x) = 4\tan x\cot x = 4$ (điều kiện $\sin x\cos x \neq 0$).

• $B = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x - \cos^6 x)$

$= 3[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x] - 2[(\sin^2 x + \cos^2 x)^3$

$-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 3 - 6\sin^2 x\cos^2 x - 2 + 6\sin^2 x\cos^2 x = 1$.

• $C = \cos^2 x\cot^2 x + 2\cos^2 x - \cot^2 x + \sin^2 x$

$= \cos^2 x(\cot^2 x + 1) - \cot^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x$

$= \cos^2 x.\frac{1}{\sin^2 x} - \cot^2 x + 1 = 1$.

391. Ta có : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$A > 90^o \Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$

$A = 90^o \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$A < 90^o \Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$

Vì $a^4 = b^4 + c^4$ nên $a > b$; $a > c$ do vậy a là cạnh lớn nhất $\Leftrightarrow$ A là góc lớn nhất.

Ta có : $(a^2)^2 = b^4 + c^4 = (b^2 + c^2)^2 - 2b^2c^2$

$\Rightarrow (a^2)^2 < (b^2 + c^2)^2 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$.

Vậy $A < 90^o$, góc A là lớn nhất $\Rightarrow B < 90^o$; $C < 90^o$, ΔABC nhọn.

392. Ta có : $a^6 = b^6 + c^6 \Leftrightarrow (a^2)^3 = (b^2 + c^2)^3 - 3b^2c^2(b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow (a^2)^3 < (b^2 + c^2)^3 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$.

Theo bài 391, ta có ΔABC nhọn.

393. a) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 25 + 100 - 100\cos 51^o = 125 - 100\cos 51^o$

$\Rightarrow c = \sqrt{125 - 100\cos 51^o} \approx 7{,}878$.

b) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 7 + 16 - 8\sqrt{7}.(-\frac{1}{2}) = 23 + 4\sqrt{7} \Rightarrow b = \sqrt{23 + 4\sqrt{7}}$.

c) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 0{,}25 + 169 - 13\cos 32^o = 169{,}25 - 13\cos 32^o$.

$\Rightarrow a = \sqrt{169{,}25 - 13\cos 32^o} \approx 12{,}579$.

394. a) $\hat{A} = 180^o - (33^o + 60^o) = 87^o \Rightarrow \frac{50}{\sin 87^o} = \frac{b}{\sin 33^o} = \frac{c}{\sin 60^o}$

$\Rightarrow b = \frac{50\sin 33^o}{\sin 87^o} \approx 27{,}269$; $c = \frac{50\sin 60^o}{\sin 87^o} \approx 43{,}36$.

b) $\dfrac{13}{\sin 67^\circ 23'} = \dfrac{10}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \dfrac{10\sin 67^\circ 23'}{13} \approx 0{,}71 \Rightarrow \hat{B} \approx 45{,}24^\circ = 45^\circ 14'$.

$\Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - (67^\circ 23' + 45^\circ 14') = 67^\circ 23' \Rightarrow c = 13$ (tam giác cân).

$\dfrac{13}{\sin 120^\circ} = \dfrac{10}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \dfrac{10\sin 120^\circ}{13} = \dfrac{5\sqrt{3}}{13} \approx 0{,}666$

$\Rightarrow \hat{B} \approx 41{,}759^\circ = 41^\circ 45' \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - (120^\circ + 41^\circ 45') = 18^\circ 15'$

$\Rightarrow c = \dfrac{13\sin 18^\circ 15'}{\sin 120^\circ} = 4{,}7.$

395. a) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 25 + 49 - 2.5.7.\dfrac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$

$\cos A = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \dfrac{4}{5}.$

• $\sin B = \dfrac{b}{a}\sin A = \dfrac{5}{4\sqrt{2}}.\dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \hat{B} = 45^\circ \\ \hat{B} = 135^\circ \end{array}\right.$

$\hat{B} = 135^\circ$ loại vì $> 90^\circ$

• $S^2_{\Delta ABC} = (6 + 2\sqrt{2})(6 - 2\sqrt{2})(1 + 2\sqrt{2})(2\sqrt{2} - 1) = (36 - 8)(8 - 1) = 196$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = 14.$

• $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{4\sqrt{2}.5.7}{4.14} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$; $r = \dfrac{2S}{2p} = \dfrac{14}{6 + 2\sqrt{2}} = \dfrac{21 - \sqrt{2}}{7}.$

b) $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow \sin A = \dfrac{2S}{bc} = \dfrac{6\sqrt{3}}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$ hoặc $\hat{A} = 120^\circ$.

$\hat{A} = 60^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 16 + 9 - 12 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}.$

$\hat{A} = 120^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 16 + 9 + 12 = 37 \Rightarrow a = \sqrt{37}.$

Nếu $\hat{A} = 60^\circ$ thì $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{4.3.\sqrt{13}}{4.3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{39}}{3}.$

Nếu $\hat{A} = 120^\circ$ thì $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{4.3.\sqrt{37}}{4.3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{37}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{111}}{3}.$

396. • $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 225 + 400 - 300 = 325 \Rightarrow c = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}.$

• $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = 150.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 75\sqrt{3}.$

• $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{15.20.5\sqrt{13}}{4.75\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{39}}{3}.$

• $h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{150\sqrt{3}}{15} = 10\sqrt{3}.$

• $r = \dfrac{2S}{2p} = \dfrac{150\sqrt{3}}{35+5\sqrt{13}} = \dfrac{30\sqrt{3}}{7+\sqrt{13}} = \dfrac{35\sqrt{3}-5\sqrt{39}}{6}$.

397. $CN = 9 \Rightarrow CG = 6$; $BM = 6 \Rightarrow GB = 4$

• Xét ΔGBC có $BC^2 = GB^2 + GC^2 - 2GB.GC.\cos 120^0 = 6^2 + 4^2 + 24 = 76$

$\Rightarrow BC = 2\sqrt{19}$.

• $S_{\Delta GBC} = \dfrac{1}{2}GB.GC.\sin G = \dfrac{1}{2}.6.4.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ đvdt.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta GBC} = 18\sqrt{3}$ đvdt.

398. $S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{2}cl_a\sin\dfrac{A}{2}$; $S_{\Delta ADC} = \dfrac{1}{2}bl_a\sin\dfrac{A}{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}l_a(b+c)\sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow l_a = \dfrac{bc}{b+c}.\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\sin A}$

399. a) $b = c\cos A + a\cos C$

Từ B vẽ $BH \perp AC$, H nằm trong đoạn AC

($\hat{B}$ vuông, $\hat{B}$ nhọn, $\hat{B}$ tù).

$b = AC = AH + HC = c\cos A + a\cos C$

H nằm ngoài đoạn AC ($\hat{A}$ tù chẳng hạn).

$b = CH - AH = a\cos C + c\cos A$.

b) $\cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Ta có : $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ và $\dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{2R}{a}$

nên $\cot A = \cos A.\dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{(b^2+c^2-a^2)R}{abc}$ mà $S = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow \dfrac{R}{abc} = 4S$

Vậy $\cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

c) $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{(b^2+c^2-a^2)+(a^2+b^2-c^2)+(a^2+c^2-b^2)}{4S}$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{4S} = \frac{(a^2+b^2+c^2)}{abc}R$$

d) $\dfrac{b^2 - c^2}{a}\cos A = \dfrac{b^2-c^2}{a}.\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{b^4-c^4-a^2b^2+a^2c^2}{2abc}$

$\dfrac{c^2 - a^2}{b}\cos B = \dfrac{c^2-a^2}{b}.\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{c^4-a^4-c^2b^2+a^2b^2}{2abc}$

$$\frac{a^2-b^2}{c}\cos C = \frac{a^2-b^2}{c}.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a^4-b^4-a^2c^2+b^2c^2}{2abc}$$

$$\frac{b^2-c^2}{a}\cos A + \frac{c^2-a^2}{b}\cos B + \frac{a^2-b^2}{c}\cos C$$

$$= \frac{1}{2abc}(b^4-c^4-a^2b^2+a^2c^2+c^4-a^4-c^2b^2+a^2b^2+a^4-b^4-a^2c^2+b^2c^2)$$

$= 0$.

400. $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$

- $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2p}{2S}=\frac{p}{pr}=\frac{1}{r}$

- Do $S=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$

$\Rightarrow \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a+p-b+p-c}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$

401. $\frac{c}{b}=\frac{m_b}{m_c} \Leftrightarrow c.m_c=b.m_b \Leftrightarrow c^2m_c^2=b^2m_b^2$

Theo định lý về đường trung tuyến ta có :

$$\begin{cases} a^2+c^2=2m_b^2+\dfrac{b^2}{2} \\ a^2+b^2=2m_c^2+\dfrac{c^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a^2+c^2)b^2=4b^2m_b^2+b^4 \\ 2(a^2+b^2)c^2=4c^2m_c^2+c^4 \end{cases}$$

Trừ hai đẳng thức cho nhau ta có : $b^4+c^4=2a^2(b^2-c^2) \Rightarrow b^2+c^2=2a^2$.

Theo bài 399.b : $\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}=\frac{2a^2-a^2}{4S}=\frac{a^2}{4S}$

$\cot B+\cot C=\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}=\frac{2a^2}{4S}=2\cot A$.

402. Từ $\cot A=2\cot B=3\cot C$ thì $\cot A, \cot B, \cot C>0$ (vì nếu có góc tù thì chỉ có góc cot đó là số âm).

$\cot A>0 \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}>0 \Leftrightarrow b^2+c^2>a^2 \Leftrightarrow A<90^o$.

Tương tự : $B<90^o$; $C<90^o$.

$\cot A=2\cot B \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}=2\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}$

$\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=2a^2+2c^2-2b^2 \Leftrightarrow 3a^2+c^2=3b^2$.

$\cot A=3\cot C \Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=2a^2+2b^2-2c^2 \Leftrightarrow 4a^2+4b^2=4c^2$.

Vậy ta có : $\begin{cases} 3a^2 + c^2 = 3b^2 \\ 2a^2 + b^2 = 2c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 = 2b^2 + c^2 \\ a^2 = 4b^2 + 3c^2 \end{cases}$

403. $GO^2 = R^2 - \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$

Áp dụng hằng đẳng thức : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$,

$$2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$$

Ta có : $9\overrightarrow{OG}^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC})$

$\Leftrightarrow 9GO^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + (OA^2 + OB^2 - AB^2) + (OA^2 + OC^2 - AC^2)$

$+ (OB^2 + OC^2 - BC^2) = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$

404. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O,R), ngoại tiếp đường tròn (I,r). Kẻ AI kéo dài gặp đường tròn ở D. ΔBID cân (hoặc ΔCID cân). Ta có :

$IA.ID = IA.BD$ mà $IA = \dfrac{r}{\sin\frac{A}{2}}$ và $BD = 2R\sin\dfrac{A}{2} \Rightarrow IA.ID = 2Rr.$

Kẻ đường thẳng IO : $IA.IB = -IO^2 + R^2 = 2Rr.$

$\Rightarrow IO^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r) \Rightarrow OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$

405. Theo định lí Eule : 3 điểm tâm đường tròn ngoại tiếp O, trọng tâm G và trực tâm H của ΔABC nằm trên một đường thẳng và $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \Rightarrow OH = 3OG.$

Mà $OG^2 = R^2 - \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \Rightarrow OH^2 = 9OG^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

$\Rightarrow OH = \sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}.$

406. Cho A, B. Tìm quĩ tích M mà $MA^2 + MB^2 = 2AB^2$

Gọi O là trung điểm AB : $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \dfrac{AB^2}{2} = 2AB^2$

$\Leftrightarrow 2MO^2 = \dfrac{3AB^2}{2} \Leftrightarrow MO^2 = \dfrac{3AB^2}{4} \Rightarrow 2MO = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$

Vậy M ∈ đường tròn tâm O bán kính R là đường cao của Δ đều mà cạnh là AB.

407. Cho A, B. Tìm quĩ tích M mà $MA^2 + 2MB^2 = 2AB^2$
Chia AB làm 3 phần bằng nhau bởi I và K.

Ta có $MA^2 + MK^2 = 2MI^2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}AB\right)^2$

$$MI^2 + MB^2 = 2MK^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}AB\right)^2$$

$$MA^2 + MK^2 + 2MI^2 + 2MB^2 = 2MI^2 + 4MK^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}AB\right)^2$$

$$MA^2 + 2MB^2 = 3MK^2 + \frac{2}{3}AB^2$$

$$3MK^2 + \frac{2}{3}AB^2 = 2AB^2 \Rightarrow 3MK^2 = \frac{4}{3}AB^2 \Rightarrow MK^2 = \frac{4}{9}AB^2$$

$$MK = \frac{2}{3}AB.$$

K là điểm cố định vậy M $\in$ đường tròn tâm K bán kính $MK = \frac{2}{3}AB$.

408. Hai trung tuyến BM và CN của ΔABC vuông góc

$\Leftrightarrow \text{cotg}A = 2(\text{cotg}B + \text{cotg}C)$

ΔABC có 3 cạnh là a, b, c thì $BM = m_b = \dfrac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$, ($m_b$ là độ dài trung tuyến xuất phát từ đỉnh B)

$CN = m_c = \dfrac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$. $BM \perp CN$ thì ΔBGC vuông tại G nên

$$a^2 = BG^2 + CG^2 = \frac{4}{9}m_b^2 + \frac{4}{9}m_c^2$$

$\Leftrightarrow 9a^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 4a^2 + b^2 + c^2$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$

Ta có $\cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$, $\cot B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}$, $\cot C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

Vậy $\cot A = 2(\cot B + \cot C)$

$\Leftrightarrow \ b^2 + c^2 - a^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2)$

$\Leftrightarrow \ b^2 + c^2 - a^2 = 4a^2.$

$\Leftrightarrow \ b^2 + c^2 = 5a^2$

Vậy $BM \perp CN \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2 \Leftrightarrow \cot A = 2(\cot B + \cot C)$.

409. a) Theo định lí hàm số sin : $\dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{b}{c}$ và $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Do đó $\dfrac{\sin B}{\sin C} = 2\cos A \Leftrightarrow \dfrac{b}{c} = 2.\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow b^2 = b^2 + c^2 - a^2$

$\Leftrightarrow c^2 = a^2 \Rightarrow \Delta ABC$ cân ở B.

b) $S = p(p - a) \Leftrightarrow S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c) = p^2(p - a)^2$

$\Leftrightarrow p(p - a) = (p - b)(p - c) \Leftrightarrow pa - pb - pc + bc = 0$

$\Leftrightarrow p(b + c - a) - bc = 0 \Leftrightarrow (a + b + c)(b + c - a) - bc = 0$

$\Leftrightarrow (b + c)^2 - a^2 - 2bc = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow \Delta ABC$ có $A = 90^\circ$.

c) $r = r_a - r_b - r_c \Leftrightarrow r_b + r_c = r_a - r \Leftrightarrow \dfrac{S}{p-b} + \dfrac{S}{p-c} = \dfrac{S}{p-a} - \dfrac{S}{p}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} = \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p} \Leftrightarrow \frac{p-c+p-b}{(p-b)(p-c)} = \frac{p-p+a}{p(p-a)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{(p-b)(p-c)} = \frac{a}{p(p-a)} \Leftrightarrow p(p-a) = (p-b)(p-c)$$

Theo CM trên thì ΔABC vuông ở A.

410. a) $h_a + h_b + h_c = \dfrac{2S}{a} + \dfrac{2S}{b} + \dfrac{2S}{c} = 2S(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}) \geq \dfrac{2S.9}{a+b+c} = 9.\dfrac{2S}{2p} = 9r$

Nếu $h_a + h_b + h_c = 9r \Rightarrow a = b = c \Rightarrow \Delta ABC$ là Δ đều.

b) $r_a + r_b + r_c = \dfrac{S}{p-a} + \dfrac{S}{p-b} + \dfrac{S}{p-c}$

$$= S(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}) \geq \frac{S.9}{p-a+p-b+p-c} = 9.\frac{S}{p} = 9r$$

Vậy $r_a + r_b + r_c = 9r \Leftrightarrow p - a = p - b = p - c \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

c) Từ $a^2 = \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b+c-a} \Leftrightarrow b^3 + c^3 = (b+c)a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - bc = a^2$

Mà $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow 2\cos A = 1 \Rightarrow \cos A = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ$.

Từ $a = 2b\cos A \Rightarrow a = b \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

411. a) Nếu $2\cos B\sin C = \sin A$ thì $\dfrac{\sin A}{\sin C} = 2\cos B$. Theo bài 409c $\Rightarrow \Delta ABC$ cân đỉnh A.

Hoặc $2\cos B\sin C = \sin A \Leftrightarrow 2.\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.\dfrac{c}{2R} = \dfrac{a}{2R}$

$\Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = a^2 \Leftrightarrow c = b$.

b) $\begin{cases} \sin A + \sin B = 2\sin C \\ \cos A + \cos B = 2\cos C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2R} + \dfrac{b}{2R} = \dfrac{2c}{2R} \\ \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 2\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2c \\ a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) = 2c(a^2 + b^2 - c^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2c \\ a(b^2 + c^2 - a^2) - a(a^2 + b^2 - c^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) - b(a^2 + b^2 - c^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2c \\ a(c^2 - a^2) + b(c^2 - b^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2c \\ ab^2 + a^2b - a^3 - b^3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2c \\ a(a + b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2c \\ (a - b)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Vậy ΔABC đều.

412. a) Đường tròn đường kính BC đi qua C' và B' nên AB'.AC = AC'.AB = $\mathscr{P}$A/(BC).

Đường tròn đường kính CH đi qua B' và A' nên AH.AA' = AB'.AC' = $\mathscr{P}$A/(CH).

Đường tròn đường kính BH đi qua C' và A' nên AH.AA' = AC'.AB' = $\mathscr{P}$A/(BH).

⇒ $\mathscr{P}$A/(BC) = $\mathscr{P}$A/(CH) = $\mathscr{P}$A/(BH).

b) Đường tròn đường kính BC đi qua B' và C' nên ta có

$\mathscr{P}$H/(BC) = −HB.HB' = −HC.HC'.

Đường tròn đường kính AC đi qua A' và C' nên ta có

$\mathscr{P}$H/(AC) = −HA.HA' = −HC.HC'.

Đường tròn đường kính BA đi qua B' và A' nên ta có

$\mathscr{P}$H/(BA) = −HA.HA' = −HB.HB'.

Vậy $\mathscr{P}$H/(BC) = $\mathscr{P}$H/(AB) = $\mathscr{P}$H/(AC).

c) $\mathscr{P}$A'/(ABC) = $\overrightarrow{A'A}.\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{A'C}$. Nhưng H và D đối xứng nhau qua BC nên $\overrightarrow{A'D} = -\overrightarrow{A'H}$. Do đó $\mathscr{P}$A'/(ABC) = $-\overrightarrow{A'H}.\overrightarrow{A'A}$

⇒ $\overrightarrow{A'A}.\overrightarrow{A'H} = -\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{A'C}$ (đpcm).

413. Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})$

$= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = MO^2 - R^2 = \mathscr{P}_{M/(O,R)}$.

414. Đường tròn ngoại tiếp ΔMAB cắt đường thẳng cố định MO ở điểm M'. Khi đó $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -R^2$ do đó M' cố định trên OM và khác phía với M.

Ta có $OM' = \dfrac{R^2}{OM}$.

415. $\mathscr{P}_{M/(A,4)} = MA^2 - 16$

$\mathscr{P}_{M/(B,3)} = MB^2 - 9$

Theo đầu bài $MA^2 + MB^2 - 25 = 15 \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 40$

Theo bài tập 406 M ∈ đường tròn tâm O (trung điểm AB) bán kính

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{80 - 64} = 2.$$

416. SM.SN = k. Từ S hạ SH ⊥ Δ. Từ N vẽ NK ⊥ SM.

Ta có MHKN là tứ giác nội tiếp.

Do đó $\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{SH}.\overrightarrow{SK} = k$.

⇒ SK không đổi ⇒ K cố định.

Vậy N $\in$ đường tròn đường kính SK (trừ điểm S).

Đảo lại lấy N' $\in$ đường tròn đường kính SK, nối SN' cắt Δ tại M'.

$\Rightarrow \overrightarrow{SM'}.\overrightarrow{SN'} = k$.

417. HS tự làm.

418. Tứ giác MNKH nội tiếp đường tròn đường kính MK

$\Rightarrow \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OH}$

Trong tam giác vuông MOA có AN là đường cao nên: $OA^2 = ON.OM$.

Vậy $\overline{ON}.\overline{OM} = \overline{OH}.\overline{OK} = R^2$.

419. a) Kẻ AH $\perp$ BC cắt đường tròn tại D, ta có : MHDN nội tiếp

$\Rightarrow AM.AN = AH.AD$.

Trong ΔABD ta có $AH.AD = AB^2$.

Vậy $AM.AN = AB^2 \Rightarrow$ Tích đó không phụ thuộc vào vị trí M.

b) Qua BMN xác định một đường tròn. Đường tròn cắt AB tại B' thì

$AM.AN = AB.AB' = AB^2 \Rightarrow B' \equiv B$.

Vậy AB là tiếp tuyến của đường tròn (BMN) tại B.

Vì AB = AC nên ta cũng có $AC^2 = AM.AN$

$\Rightarrow$ AC là tiếp tuyến của đường tròn (CMN) tại C.

420. PM.PM' = PA'.PA (do AM'MA' nội tiếp).
AM.AN = AA'.AP (A'MNP nội tiếp đường tròn đường kính AN).
AM'.AN = AA'.AP (A'M'N'P nội tiếp đường tròn đường kính A'N').
Vậy AM.AN = A'M'.A'N' nên MNN'M' nội tiếp.

421. a) Xét tam giác vuông APB $\Rightarrow AB^2 = AP.AP'$

$\Delta AQB \Rightarrow AB^2 = AQ.AQ' \Rightarrow AP.AP' = AQ.AQ' \Rightarrow$ PQQ'P' là tứ giác nội tiếp khi $\mathscr{P}_{A/(O)} = \mathscr{P}_{A/(PQP'Q')} = AB^2$.

b) $\overrightarrow{BP}.\overrightarrow{BQ} = k^2 \Rightarrow$

422. a) AT = AT' = AB.AC không đổi $\Rightarrow$ T và T' thuộc đường tròn tâm A bán kính $R = \sqrt{AB.AC}$

b) $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AM} = AO^2 - OC^2 = \mathscr{P}A/(O\,;OC)$

423. a) OD = 12 ; OH = 4 $\Rightarrow HD = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$; $CD = 16\sqrt{2}$

Vậy $AD = \sqrt{AH^2 - HD^2} = \sqrt{16^2 + 128} = \sqrt{384} = 8\sqrt{6}$

$\mathscr{P}H/(O) = -HD^2 = -128$

b) Từ I và H nhìn OE dưới góc vuông $\Rightarrow$ AIHE thuộc đường tròn đường kính AE nên $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OE}.\overrightarrow{OI} = -\mathscr{P}O/(AE) = -48$

Trong ΔAOI ta có $OI = \sqrt{12^2 - \left(4\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \Rightarrow \overline{OE}.\overline{OI} = -48$

$\Rightarrow OE.OI = 48 \Rightarrow OE = \dfrac{48}{\sqrt{48}} = \sqrt{48} = OI$

424. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'}$ (vì HBMM' nội tiếp đường tròn đường kính BM')

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AN'}$ (vì HBNN' nội tiếp đường tròn đường kính BN')

b) Vì ABMN ∈ (O) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AN'}$ $\Rightarrow$ MM'NN' nội tiếp đường tròn. Do đó ta có $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{HM'}.\overrightarrow{HN'}$

c) HS tự làm.

425. a) Xét ΔOEM (hay OFM) ta có $DM.OR = OE^2 = R^2$

b) Cho R = 20 ; OH = 12 $\Rightarrow$ HB = 16 ; MB = 8

$P_{M/(O)} = MA.MB = 8(8 + 32) = 320$

$\Rightarrow MO^2 - R^2 = 320 \Rightarrow MO^2 = 320 + 202 = 720 \Rightarrow MO = 12\sqrt{5}$

c) Từ K và H đều nhìn MF dưới góc vuông $\Rightarrow$ MKHI nội tiếp

$\Rightarrow \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OI}$

426. a) FA = 18 ; FD = 3 ; BC = 15

Ta có $\begin{cases} FB + FC = 15 \\ FB.FC = FA.FD = 54 - \mathscr{P}_{E/(O)} \end{cases} \Rightarrow FB = 6 \text{ ; } FC = 9$

b) $\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FA}.\overrightarrow{FD} = -\mathscr{P}_{F/(OAM)}$; $\overrightarrow{FB}.\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FA}.\overrightarrow{FD} = -\mathscr{P}_{E/(OAM)}$

$\Rightarrow \overrightarrow{FB}.\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FM}.\overrightarrow{FE}$

c) $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC} = EO^2 - R^2 = P_{E/(O;R)} = OA^2$ vì (AOM) đi qua E, mà OM ⊥ EM

$\Rightarrow$ OE là đường kính. Ta lại có $EA^2 = \overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EO}$ (ΔEAO vuông tại A)

Vì OHEM nội tiếp $\Rightarrow \overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EM}$

d) Vậy $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EM} = EA^2$

e) Đường tròn AMF thỏa mãn $EA^2 = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EM} \Leftrightarrow$ EA là tiếp tuyến của đường tròn AFM tại A.

427. a) AB = 8 ; R = 5 ; OC = 15 ;

$P_{C/(O)} = CA.CB = OC^2 - R^2 = 15^2 - 5^2 = 200$

Do đó $CB(CB + 8) = 200 \Rightarrow CB^2 + 8CB = 200 \Rightarrow CB = 6\sqrt{6} - 4$

$\Rightarrow CA = 6\sqrt{6} + 4$

b) Xét CMO vuông ở M ta có $CM^2 = \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CO}$ và $CM^2 = \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CO} = \mathscr{P}_{C/(O;R)}$

Tứ giác OHPI nội tiếp $\Rightarrow \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CF}$

Vậy $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CI}$

Xét $\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$: Vì A ; B ; C ; I cố định $\Rightarrow$ P cố định. Vậy H thuộc đường tròn đường kính CP. Khi đường tròn tâm O biến thiên vẫn qua AB

c) Trọng tâm của ΔAHB nằm trên IH và $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IH}$

Nối H với trung điểm của CP là E ta có $HE = \frac{CP}{2}$ không đổi.

Từ G vẽ GK // HE ; $IK = \frac{1}{3}IE$; $GK = \frac{1}{3}HE \Rightarrow$ K cố định, GK không đổi

$\Rightarrow$ G thuộc đường tròn tâm K bán kính $\frac{CP}{6}$.

428. $\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{OF} = R^2 \Rightarrow \overrightarrow{OE}$ và $\overrightarrow{OF}$ cùng chiều nên $OE.OF = R^2$ thì $OE < R$ và $OF > R$. Từ E kẻ $d \perp OC$ cắt (O) tại M và N. Khi đó $OE.OF = R^2 = OM^2$
$\Rightarrow$ ΔOMF vuông tại M nghĩa là FM là tiếp tuyến của đường tròn (O ;R)
Khi đó $\mathscr{P}_{E/(O)} = -EM^2$; $\mathscr{P}_{F/(O)} = CM^2$
Trong ΔOMC ta có :

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{CM^2} = \frac{1}{ME^2} \Leftrightarrow \frac{1}{R^2} = \frac{1}{\mathscr{P}_{F/(O)}} = -\frac{1}{\mathscr{P}_{E/(O)}} \Rightarrow \frac{1}{\mathscr{P}_{F/(O)}} + \frac{1}{\mathscr{P}_{E/(O)}} = -\frac{1}{R^2}$$

429. a) $\hat{E} = \hat{H}_1 = \hat{C} \Rightarrow \widehat{BEF} + \widehat{BCF} = 180^o$
Vậy BCFE nội tiếp
Hoặc $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = AH^2$; $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC} = AH^2 \Rightarrow \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC}$
Vậy BEFC nội tiếp. Mặt khác AEHF là hình chữ nhật nên EF luôn đi qua trung điểm K của AH
b) M là giao của đường tròn đường kính AH với đường tròn (ABC) nên AM là trục đẳng phương của 2 đường tròn (AH) và (ABC) ; EF là trục đẳng phương của đường tròn (AH) và đường tròn (BEFC) ; còn BC là trục đẳng phương của 2 đường tròn (ABC) và (BEFC). Giao của EF và BC là I nghĩa là :

Vì $I \in EF \Rightarrow \mathscr{P}_{I/(AH)} = \mathscr{P}_{I/(BCFE)}$

$I \in BC \Rightarrow \mathscr{P}_{I/(ABC)} = \mathscr{P}_{I/(BCFE)}$

$\Rightarrow \mathscr{P}_{I/(AH)} = \mathscr{P}_{I/(ABC)} \Rightarrow I \in AM \Rightarrow$ BC ; EF ; AM đồng quy tại I
c) Khi A, H cố định, B và C thay đổi, đường tròn (BCFE) thay đổi nhưng

$\mathscr{P}_{A/(BCFE)} = AH^2$ không đổi

và $\mathscr{P}_{H/(BCFE)} = -KH^2 = -\frac{AH^2}{4}$ không đổi

Vậy AK luôn là trục đẳng phương của các đường tròn đó
Đường thẳng AH có A ngoài đường tròn, H ở trong đường tròn (BCFE) nên AH cắt đường tròn (BCFE) tại 2 điểm M, N. Khi đó

$$\mathscr{P}_{M/(BCFE)} = \mathscr{P}_{N/(BCFE)} = 0$$

Vì thế mọi đường tròn (BCFE) đều phải đi qua M và N. Ta chọn trường hợp ΔABC vuông cân để vẽ đường tròn (BCFE) cắt AH tại M và N thì M và N được xác định hoàn toàn.

430. a) $AB = 12$; $\widehat{AST} = 60^o \Rightarrow AO = 6$; $SO = 12$; $SA = 6\sqrt{3}$

$\Rightarrow SC = 12\sqrt{3} \Rightarrow AC = 18 \Rightarrow DC = 12 \Rightarrow BC = 6$

$\mathscr{P}_{C/(O)} = CB.CA = 6.18 = 108$

b) Xét ΔSCD có CA và DT là 2 chiều cao $\Rightarrow$ O là trực tâm của ΔSCD

$\Rightarrow SO \perp DC.$

c) $SO \perp AT$ tại M $\Rightarrow$ khi S di chuyển trên tiếp tuyến tại A thì M thuộc đường tròn đường kính AO (trừ O và A)

d) PQ là trục đẳng phương của 2 đường tròn (SOI) và (O)

$$\mathscr{P}_{M/(SOI)} = \overrightarrow{MS}.\overrightarrow{MO} = -\overrightarrow{MA}^2 \; ; \; \mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MT} = -\overrightarrow{MA}^2$$

$$\Rightarrow \mathscr{P}_{M/(SOI)} = \mathscr{P}_{M/(O)} \Rightarrow M \in PQ$$

Ta có $\overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CO} \Rightarrow CC' = \dfrac{CI.CO}{CS} = \dfrac{9.12}{12\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

$$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AO} \Rightarrow AA' = \frac{AI.AO}{AS} = \frac{9.6}{6\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

Vậy $AA' = CC' = 3\sqrt{3}$

431. HS tự làm.

432. a) $\mathscr{P}_{B/(ADM)} = BD.BM \; ; \; \mathscr{P}_{C/(ADM)} = CM.CD$

$$\Rightarrow \mathscr{P}_{B/(ADM)} + \mathscr{P}_{C/(ADM)} = BD.BM + CM.CD = BM(BD + CD) = \frac{a^2}{2}$$

b) Ta có : $BE.BA = BD.BM \Rightarrow BE = \dfrac{BD.BM}{BA}$

$$CF.CA = CD.CM \Rightarrow CF = \frac{CD.CM}{CA}$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{BD.BM}{BA}.\frac{CA}{CD.CM} = \frac{BD}{CD}.\frac{CA}{BA} = \frac{BA}{CA}.\frac{CA}{BA} = 1$$

$\Rightarrow BE = CF$

c) Ta có $GO^2 - R^2 = \mathscr{P}_{G/(ABC)}$

Theo bài 403 ta có $GO^2 = R^2 - \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \Rightarrow \mathscr{P}_{G/(ABC)} = -\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$

433. Xét ΔDEF : các đường cao CC' ; DD' ; FF' có H là trực tâm ; M là trung điểm AC. Đường tròn đường kính AC chứa C' $\Rightarrow \mathscr{P}_{H/(AC)} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC'}$

Đường tròn đường kính BD có tâm N và chứa D' $\Rightarrow \mathscr{P}_{H/(BD)} = \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HD'}$

Đường tròn đường kính EF có tâm P và chứa F' $\Rightarrow \mathscr{P}_{H/(EF)} = \overrightarrow{HF}.\overrightarrow{HF'}$

$\mathscr{P}_H$ bằng nhau đối với 3 đường tròn đường kính AC ; BD và EF vì

$$\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC'} = \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HD'} = \overrightarrow{HF}.\overrightarrow{HF'}$$

Xét ΔBCE có trực tâm H' $\Rightarrow \mathscr{P}_{H'}$ bằng nhau với 3 đường tròn đường kính AC ; BD ; EF $\Rightarrow$ HH' là trục đẳng phương của 3 đường tròn đó

$\Rightarrow HH' \perp MN \; ; \; HH' \perp MP \; ; \; HH' \perp NP \Rightarrow$ M, N, P thẳng hàng.

434. Gọi 3 chân đường cao của tam giác là A', B', C'

Gọi 3 trung điểm 3 cạnh là M, N, P

Gọi 3 trung điểm của AH, BH, CH là Q, K, T

Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} PN \parallel BC \quad \text{và } PN = \dfrac{1}{2}BC \\ KT \parallel BC \quad \text{và } KT = \dfrac{1}{2}BC \end{array}\right\} \Rightarrow \text{PNKT là hình bình hành}$$

$\Rightarrow$ PK // AA' ; NT // AA' $\Rightarrow$ PK $\perp$ KT $\Rightarrow$ PNKT thuộc đường tròn đường kính KN và đường tròn này chứa thêm B' ; C' và A'

Vậy 7 điểm A', P, N, T, K, B', C' thuộc 1 đường tròn

Tương tự NMQK cũng là hình chữ nhật nên nội tiếp đường tròn đường kính NK. Vậy 9 điểm cùng thuộc 1 đường tròn.

Tâm của đường tròn chín điểm là trung điểm đoạn nối trung điểm 1 cạnh với trung điểm đoạn nối trực tâm và đỉnh đối diện cạnh ấy.

435. a) Vì G là trọng tâm ΔABC nên với mọi M ta có :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Chọn M $\equiv$ O là tâm của đường tròn GBC. Khi đó :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} \text{ và } OB = OC = OG = R.$$

$$\Rightarrow 9OG^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow 9OG^2 = OA^2 + R^2 + R^2 + (OA^2 + OB^2 - AB^2 + OA^2 + OC^2 - AC^2 + OB^2 + OC^2 - BC^2).$$

$$\Rightarrow 9R^2 = 3OA^2 + 6R^2 - (AB^2 + AC^2 + BC^2)$$

$$\Rightarrow 3(OA^2 - R^2) = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow OA^2 - R^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

Vậy : $\mathcal{P}_{A/(GBC)} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

Tương tự : $\mathcal{P}_{B/(GAC)} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$; $\mathcal{P}_{C/(GAB)} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

Vậy : $\mathcal{P}_{A/(GBC)} + \mathcal{P}_{B/(GAC)} + \mathcal{P}_{C/(GAB)} = a^2 + b^2 + c^2$.

b) $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GB'} = \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GC'} = \mathcal{P}_{G/(ABC)} = -\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{GA'} = \frac{GA}{\mathcal{P}_{G/(ABC)}} \ ; \ \frac{1}{GB'} = \frac{GB}{\mathcal{P}_{G/(ABC)}} \ ; \ \frac{1}{GC'} = \frac{GC}{\mathcal{P}_{G/(ABC)}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A'G^2}+\frac{1}{B'G^2}+\frac{1}{C'G^2}=\frac{1}{\mathscr{P}^2_{G/(ABC)}}(GA^2+GB^2+GC^2)$$

$$=\frac{9^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=\frac{27}{a^2+b^2+c^2}$$

Dùng định lí đường trung tuyến ta có :

$$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

436. Theo định lý Ơle : AH = 2OI.

ΔAEC vuông cân $\widehat{C}=45^o \Rightarrow AB=\frac{1}{4}$ đường tròn.

Vậy : $R=\frac{AB}{\sqrt{2}}$ mà $AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=a\sqrt{10}$

Vậy : $R=a\sqrt{5}$. O là tâm đường tròn nên :

$$OI=\sqrt{R^2-BI^2}=\sqrt{5a^2-(2a)^2}=a.$$

Vậy : AH = 2a $\Rightarrow$ HEOI là hình vuông cạnh a.

a) Vậy : $\mathscr{P}_{H/(O)}=HO^2-R^2=a^2-(a\sqrt{5})^2=-4a^2$.

Cũng theo Ơle : $GO=\frac{1}{3}HO \Rightarrow GO^2=\frac{a^2}{9}$ nên :

$$\mathscr{P}_{G/(O)}=GO^2-R^2=\frac{a^2}{9}-(a\sqrt{5})^2=-\frac{-44}{9}a^2.$$

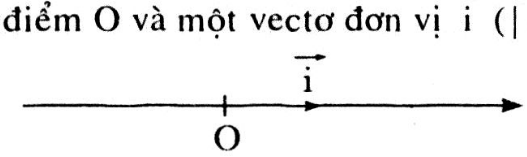
b) Nối AO cắt EC tại F. Theo Talét thì : $EF=\frac{3}{2}HO=\frac{3a}{2}$ (F là trung điểm EC)

Ta lại có : Δ vuông AKF, Δ vuông AEF $\Rightarrow$ AK = 2AF.

Vậy $AK^2=4AF^2=4(AE^2+EF^2)=4(9a^2+\frac{9a^2}{4}=45a^2$.

Mà $\mathscr{P}_{K/(O)}=AK^2=45a^2$.

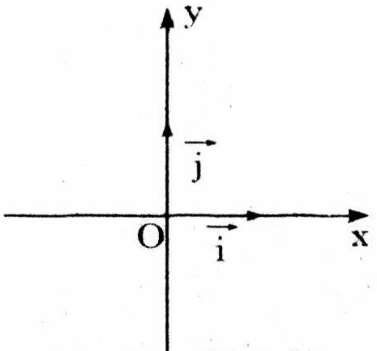
437. 1) • Trục toạ độ (hay còn gọi tắt là trục) là một đường thẳng, trên đó có xác định một điểm O và một vectơ đơn vị $\vec{i}$ ($|\vec{i}|=1$ đơn vị dài)



Hình 53

• Cho vectơ $\vec{a}$ nằm trên trục $(O;\vec{i})$ thì có số x_0 xác định để $\vec{a}=x_0\vec{i}$. Số x_0 gọi là toạ độ của vectơ $\vec{a}$ trên trục.

• Cho điểm M nằm trên trục $(O;\vec{i})$ thì có số x_1 xác định để $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{i}$ thì x_1 gọi là toạ độ của điểm M trên trục.



Hình 54

2) • Trên hình 54 là hệ trục toạ độ Oxy hay $(O;\vec{i};\vec{j})$ (với $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = 0$)

Mặt phẳng chứa hệ trục Oxy gọi là mặt phẳng toạ độ.

• Trong mặt phẳng toạ độ nếu $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số $(x;y)$ gọi là toạ độ của vectơ $\vec{u}$ và kí hiệu là $\vec{u} = (x;y)$ hoặc $\vec{u}(x;y)$, số thứ nhất gọi là hoành độ, số thứ hai gọi là tung độ của vectơ $\vec{u}$.

• Trong mặt phẳng toạ độ mỗi điểm M có vectơ $\overrightarrow{OM}$, chẳng hạn $\overrightarrow{OM} = (x;y)$ thì $(x;y)$ gọi là toạ độ của điểm M và kí hiệu là $M = (x;y)$ hay $M(x;y)$. Như vậy $M(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x;y)$

438. a) $\vec{a_1} = (x_1;y_1) \Leftrightarrow \vec{a_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$

$\vec{a_2} = (x_2;y_2) \Leftrightarrow \vec{a_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

Vậy $\vec{a_1} + \vec{a_2} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$

$\Leftrightarrow \vec{a_1} + \vec{a_2} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$

b) Chứng minh tương tự

c) Tích vô hướng

$$\vec{a_1}.\vec{a_2} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = x_1x_2\vec{i}^2 + x_1y_2\vec{i}.\vec{j} + y_1x_2\vec{j}.\vec{i} + y_1y_2\vec{j}^2$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 \text{ (do } \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1, \vec{i}\vec{j} = 0\text{)}$$

439. a) $\vec{a} = (x;y), \vec{b} = (x';y')$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}(x', y' \neq 0)$

b) $\vec{a} = (x;y) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{x.x' + y.y'}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}}$

Vậy $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

440. a) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

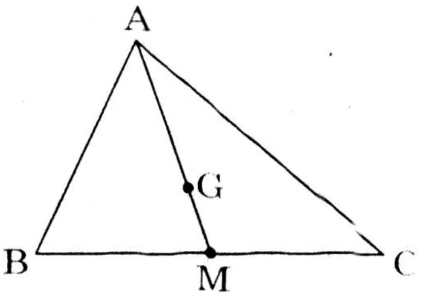
441. a) Ta biết $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ nên $x_A - x_M = k(x_B - x_M) \Leftrightarrow x_M(1-k) = x_A - kx_B$

$$\Leftrightarrow x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k}$$

Tương tự $y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1 - k}$

Khi M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $k = -1$

nên $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$



Hình 55

b) Trong ΔABC gọi M là trung điểm của AB, G là trọng tâm thì

$$GA = 2GM \Rightarrow \overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$$

Trước hết ta chứng minh

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Thật vậy theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$, nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0} \text{ (đpcm)}$$

Từ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

Cho nên $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

442. a) $\vec{a} = 3(1 ; 2) - 2(-1 ; 0) + (-1 ; 3) = (4 ; 9)$

$\vec{b} = 3(0 ; 2) - (-1 ; 3) = (1 ; 3)$

$\vec{c} = (1 ; 2) - (-1 ; 0) + 2(-1 ; 3) = (0 ; 8)$

b) $\vec{m}.\vec{n} = -1$; $\vec{m}.\vec{p} = 5$; $n.\vec{p} = 1$

c) $$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{4 + 27}{\sqrt{16 + 81}.\sqrt{1 + 9}} = \frac{31}{\sqrt{97}.\sqrt{10}} \approx 0,9968$$

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{c}\right) = \frac{72}{\sqrt{16 + 81}.\sqrt{8^2}} = \frac{72}{9,8489.8} = \frac{72}{78,79} \approx 0,9138$$

$$\cos\left(\vec{b}, \vec{c}\right) = \frac{24}{\sqrt{1 + 9}.8} = \frac{24}{25,2982} \approx 0,9487$$

d) $\vec{p} = \alpha\overrightarrow{m} + \beta\vec{n} \Rightarrow (-1 ; 3) = \alpha(1 ; 2) + \beta(-1 ; 0)$

Ta có hệ phương trình sau : $\begin{cases} \alpha - \beta = -1 \\ 2\alpha = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1,5 \\ \beta = 2,5 \end{cases}$

443. a) $\overrightarrow{AB} = (2\,;2), \overrightarrow{AC} = (5\,;-1)$, ta có $\dfrac{2}{5} \neq \dfrac{2}{-1}$, nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùn phương, vậy 3 điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) $\overrightarrow{BC} = (3\,;-3), \overrightarrow{AB} = (2\,;2), \overrightarrow{AC} = (5\,;-1)$ nên $BC = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

$$AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},\ AC = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

Vậy chu vi của ΔABC là : $p = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{26} = 5\sqrt{2} + \sqrt{26}$ (đvd)

Từ chứng minh trên, ta có

$$BC^2 = 18,\ AB^2 = 8,\ AC^2 = 26 \Rightarrow BC^2 + AB^2 = AC^2$$

(18 + 8 = 26) nên ΔABC vuông tại B.

Vậy $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BA.BC = \dfrac{1}{2}3\sqrt{2}.2\sqrt{2} = 6$ (đvdt)

444. Gọi toạ độ các đỉnh là $A(x_A\,;y_A), B(x_B\,;y_B), C(x_C\,;y_C)$.

Do $M_1(x_1, y_1)$ là trung điểm của BC nên : $x_1 = \dfrac{x_B + x_C}{2}$ (1)

$$y_1 = \frac{y_B + y_C}{2} \quad (2)$$

Tương tự với $M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3)$ ta có: $x_2 = \dfrac{x_A + x_C}{2}$ (3)

$$y_2 = \frac{y_A + y_C}{2} \quad (4)$$

$$x_3 = \frac{x_A + x_B}{2} \quad (5)$$

$$y_3 = \frac{y_A + y_B}{2} \quad (6)$$

Kết hợp (1), (3), (5) ta có hệ PT $\begin{cases} x_B + x_C = 2x_1 \\ x_A + x_C = 2x_2 \\ x_A + x_B = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_B = x_1 - x_2 + x_3 \\ x_C = x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$

Tương tự ta tìm được $y_A = -y_1 + y_2 + y_3$

$$y_B = y_1 - y_2 + y_3$$

$$y_C = y_1 + y_2 - y_3$$

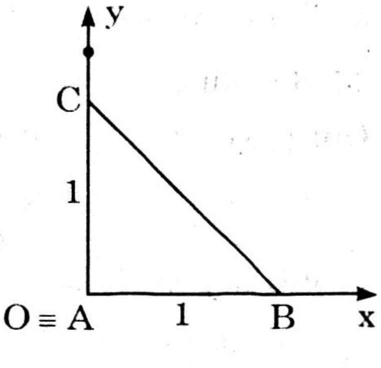
445. *Cách 1.* Lấy một hệ trục Oxy sao cho $O \equiv A$, cạnh AB nằm trên trục Ox, cạnh AC nằm trên trục Oy (h. 56)

Ta có toạ độ điểm

A(0 ; 0), B(1 ; 0) C(0 ; 1)

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AC} = (0\,;1), \overrightarrow{AB} = (1\,;0)$

nên $\overrightarrow{BA} = (-1\,;0), \overrightarrow{CB} = (1\,;-1)$



Hình 56

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = (0\,;1)(1\,;-1) + (1\,;-1).(-1\,;0) + (-1\,;0)(0\,;1)$

$= (-1) + (-1) + 0 = -2$

Cách 2 : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= -CA.CB\cos C - BC.BA\cos B - AB.AC.\cos A$ *

$= -1.\sqrt{2}.\cos 45^o - \sqrt{2}.1.\cos 45^o - 1.1\cos 90^o$

$= -1.\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}.1.\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 0 = -2$

446. a) Phương trình tổng quát của đường thẳng : $Ax + By + C = 0$. Vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A\,;B)$

b) Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1\,;2)$ và có vectơ pháp tuyến $(3\,;-4)$ là $(\Delta) : 3(x-1) - 4(y-2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 5 = 0$.

c) $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A\,; y_B - y_A\right)$, nên $\vec{n}$ là vectơ pháp của đường thẳng AB thì $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n} = \left(y_B - y_A, x_A - x_B\right)$

Vậy phương trình của đường thẳng (AB) :

$$\left(y_B - y_A\right)\left(x - x_A\right) + \left(x_A - x_B\right)\left(y - y_A\right) = 0$$

d) Phương trình tổng quát của đường thẳng là $Ax + By + C = 0$

*) Đường thẳng Δ_1 song song với trục hoành thì vectơ $\vec{j} = (0\,;1)$ là một vectơ pháp tuyến, nên $(\Delta_1) : y + c = 0$.

Trục hoành có phương trình : $y = 0$.

**) Tương tự đường thẳng song song với trục tung có phương trình $x + c = 0$. Trục tung có phương trình $x = 0$.

***) Đường thẳng đi qua gốc toạ độ $(0\,;0)$ nên có phương trình $Ax + By = 0$.

447. • Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$

• $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$

• $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

448. a) Ta biết vectơ pháp của đường thẳng (d) là $\vec{n} = (A\,;B)$.

M′ đối xứng với M qua (d) thì MM' $\perp$ (d) nên $\overrightarrow{MM'} // \vec{n}$

Gọi $\left(x'_M\,; y'_M\right)$ là toạ độ của điểm M' thì ta có :

$$\frac{x'_M - x_M}{A} = \frac{y'_M - y_M}{B} \Rightarrow B\left(x'_M - x_M\right) - A\left(y'_M - y_M\right) = 0$$

Gọi H là giao điểm của MM' và (d) thì H là trung điểm của MM' nên toạ độ của H là $\left(\dfrac{x_M + x'_M}{2}\,; \dfrac{y_M + y'_M}{2}\right)$

$H \in (d)$ nên ta có $A\frac{x_M + x'_M}{2} + B\frac{y_M + y'_M}{2} + C = 0$.

Do đó toạ độ của điểm M' là nghiệm của hệ PT

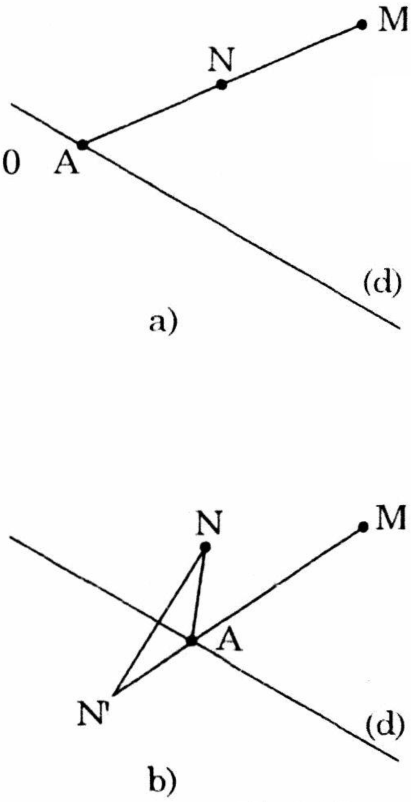
$$\boxed{\begin{cases} B(x'_M - x_M) - A(y'_M - y_M) = 0 \\ A\frac{x_M + x'_M}{2} + B\frac{y_M + y'_M}{2} + C = 0 \end{cases}} \qquad (*)$$

b) Gọi toạ độ điểm M' là $(x'_M ; y'_M)$, áp dụng công thức (*) ta có

$$\begin{cases} 2(x'_M - 1) - 3(y'_M + 2) = 0 \\ 3\frac{x'_M + 1}{2} + 2\frac{y_M - 2}{2} - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x'_M - 3y'_M - 8 = 0 \\ 3x'_M + 2y'_M - 11 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được $x'_M = \frac{49}{13}, y'_M = -\frac{2}{13}$

Vậy điểm M' có toạ độ $M'\left(\frac{49}{13} ; -\frac{2}{13}\right)$



Hình 57

449. a) Ta có điểm $P(x_0 ; y_0) \in d \Leftrightarrow x_0 + 2y_0 - 6 = 0$

Điểm $Q(x_1, y_1)$ nằm phía trên (d)

$$\Leftrightarrow x_1 + 2y_1 - 6 > 0$$

Điểm $R(x_2, y_2)$ nằm phía dưới (d)

$$\Leftrightarrow x_1 + 2y_1 - 6 < 0$$

Điểm M(5 ; 5) ta có $5 + 2.5 - 6 > 0 \Leftrightarrow$ M(5 ; 5) nằm phía trên (d). Tương tự điểm N(1 ; 4) cùng nằm phía trên (d). Hay nói khác đi hai điểm M, N nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng (d) (h.57a). Với một điểm A bất kì thuộc (d) thì ta luôn luôn có

$$|AM - AN| \le MN.$$

Vậy $|AM - AN|$ lớn nhất khi và chỉ khi A, M, N nằm trên một đường thẳng, khi đó $|AM - AN| = MN$.

Trong trường hợp này A là giao điểm của MN và (d)

Phương trình đường thẳng MN

$$\frac{x - 1}{5 - 1} = \frac{y - 4}{5 - 4} \Rightarrow x - 4y + 15 = 0$$

Toạ độ của A là nghiệm của hệ PT : $\begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ x - 4y + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

Vậy điểm A phải tìm là $A\left(\dfrac{7}{2} ; \dfrac{5}{4}\right)$.

b) Gọi N' là điểm đối xứng với N qua (d), nối N'M nó cắt (d) tại A thì A là điểm phải tìm (HS tự chứng minh điều này) (h.57b)

Theo bài tập 448 ta có $\begin{cases} 2(x'_N - 1) - (y'_N - 4) = 0 \\ 1.\dfrac{x'_N + 1}{2} + 2.\dfrac{y'_N + 4}{2} - 6 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x'_N - y'_N + 2 = 0 \\ x'_N + 2y'_N - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_N = -\dfrac{1}{5} \\ y'_N = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng qua hai điểm M, N' : $17x - 26y + 45 = 0$.

Toạ độ của điểm A là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ 17x - 26y + 45 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{133}{30} \\ y = \dfrac{47}{60} \end{cases}$$

Vậy toạ độ của điểm A là $\left(\dfrac{133}{30} ; \dfrac{47}{60}\right)$.

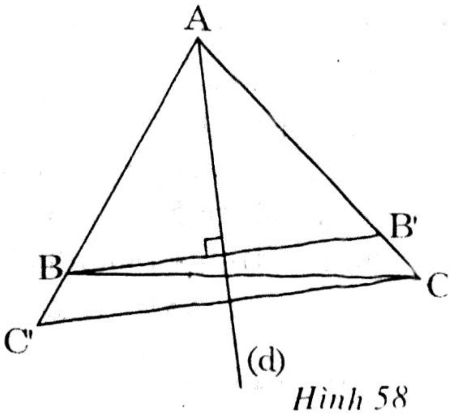
450. Từ B kẻ BB' ⊥ (d), $B' \in AC$ dễ dàng có B' là điểm đối xứng với điểm B qua (d). Tương tự C' đối xứng với C qua (d).

Gọi toạ độ của B' là $(x'_{B'} ; y'_{B'})$

Theo bài tập 448 ta có :

$$\begin{cases} x'_{B'} - 1 - 1(y'_{B'} - 3) = 0 \\ \dfrac{1 + x'_{B'}}{2} + \dfrac{3 + y'_{B'}}{2} + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases}$$



Hình 58

Vậy $B'(-5 ; -3)$.

Tương tự ta tìm được toạ độ của $C'(-2 ; -3)$.

Vậy đường thẳng AB đi qua hai điểm B và C', đường thẳng AC đi qua hai điểm C và B'

Ta có phương trình các cạnh của ΔABC :

$AB : 6(x + 2) - 3(y + 3) = 0 \Leftrightarrow 6x - 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0$

$AC : 3(x + 5) - 7(y + 3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 7y - 6 = 0$

$BC : 3(x - 2) + 1(y - 0) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 6 = 0$

451. Ta biết tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là giao điểm của ba đường trung trực của ba cạnh của tam giác đó.

Gọi (Δ_1) là đường trung trực của cạnh BC thì Δ_1 đi qua A' và vuông góc với BC, mà $B'C' // BC$, nên $(\Delta_1) \perp B'C'$ suy ra $\overrightarrow{B'C'}$ là vectơ pháp của (Δ_1).

$\overrightarrow{B'C'} = (2 ; -6)$, nên $(\Delta_1) : 2(x - 1) - 6(y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x - 6y + 4 = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 2 = 0$

Tương tự gọi (Δ_2) là đường trung trực của cạnh AB thì phương trình $(\Delta_2) : x + 3y - 8 = 0$

Toạ độ tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔABC là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

Vậy toạ độ tâm O là $\left(3 ; \dfrac{5}{3}\right)$

452. Dễ dàng tìm được toạ độ của 3 điểm $A(1 ; 2), B(3 ; 4), C(-1 ; 5)$

Phương trình đường cao AH của ΔABC là : $x + y - 3 = 0$

Phương trình đường cao BH của ΔABC là : $2x - 3y + 6 = 0$

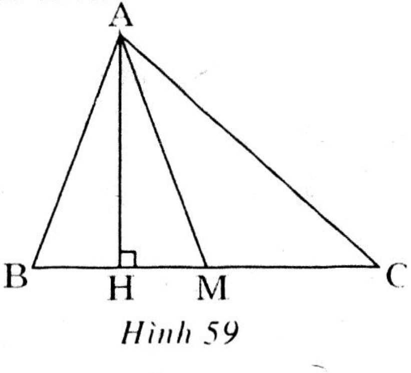
Toạ độ trực tâm H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x - 3y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{3}{5} ; \frac{12}{5}\right)$$

453. *Trường hợp 1* : Đường cao và đường trung tuyến kẻ từ *A*.

Toạ độ đỉnh *A* là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 12 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-3 ; 2)$$



Hình 59

Phương trình đường thẳng chứa cạnh $(AC) : 3x + 7y - 5 = 0$

Đường thẳng $BC \perp AH$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3 ; 2)$

Vậy phương trình đường thẳng chứa cạnh $(BC) : 3(x - 4) + 2(y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3x + 2y - 10 = 0$

Toạ độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(6 ; -4)$$

Suy ra toạ độ của điểm B(8 ; – 7)

Vậy phương trình đường thẳng chứa cạnh (AB) : $9x + 11y + 5 = 0$.

Trường hợp 2. Đường cao và trung tuyến xuất phát từ B thì phương trình đường thẳng (AB) : $9x + 11y + 5 = 0$.

Phương trình đường thẳng BC là phương trình đường thẳng (AC) của trường hợp (1) nên (BC) : $3x + 7y - 5 = 0$

Phương trình đường thẳng (AC) là phương trình đường thẳng (BC) của trường hợp 1, nên (AC) : $3x + 2y - 10 = 0$

454. a) Giả sử tìm được điểm $P(x_0 ; y_0) \in (d)$ sao cho ΔPMN cân tại P

- Do $P(x_0 ; y_0) \in (d) \Rightarrow x_0 + y_0 - 8 = 0$
- ΔPMN cân đỉnh $P \Rightarrow PM = PN$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 = (x_0 - 7)^2 + (y_0 - 5)^2$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_0 + y_0 - 8 = 0 \\ (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 = (x_0 - 7)^2 + (y_0 - 5)^2 \end{cases} \Rightarrow P(2 ; 6)$$

b) Giả sử tìm được $Q(x_1 ; y_1) \in (d)$ sao cho ΔQMN vuông tại Q.

- Do $Q(x_1 ; y_1) \in (d) \Rightarrow x_1 + y_1 - 8 = 0$
- ΔQMN vuông tại Q.

Ta có : $\overrightarrow{QM} = (1 - x_1 ; 1 - y_1)$

$\overrightarrow{QN} = (7 - x_1 ; 5 - y_1)$

Do $\overrightarrow{QM} \perp \overrightarrow{QN}$ nên $\overrightarrow{QM}.\overrightarrow{QN} = 0 \Rightarrow (1 - x_1)(7 - x_1) + (1 - y_1)(5 - y_1) = 0$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + y_1 - 8 = 0 \\ (1 - x_1)(7 - x_1) + (1 - y_1)(5 - y_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 6 \end{cases}$$

Vậy ta có hai điểm Q : $Q_1(7 ; 1)$, $Q_2(2 ; 6)$. Điểm $Q_2 \equiv P$.

455. Gọi hoành độ đỉnh A là x, $A \in (d_1)$ nên $x - y = 0 \Rightarrow x = y$ nên A(x ; x).

Do các điểm B, D thuộc Ox nên A và C đối xứng nhau qua trục hoành, nên C = (x ; – x).

Mặt khác $C \in (d_2) \Rightarrow 2x + (-x) - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Vậy A(1 ; 1), C(1 ; – 1). Trung điểm của AC là I(1 ; 0) I là tâm hình vuông,

nên $IB = ID = IA = \sqrt{(1 - 1)^2 + (1 - 0)^2} = 1$

Từ $\begin{cases} Bx \in Ox \\ D \in Ox \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(b ; 0) \\ D(d ; 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b - 1| = 1 \\ |d - 1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0, b = 2 \\ d = 0, d = 2 \end{cases}$

suy ra B(0 ; 0) và D(2 ; 0) hoặc B(2 ; 0) và D(0 ; 0).

Vậy 4 đỉnh của hình vuông ABCD là A(1 ; 1), B(0 ; 0), C(1 ; − 1) và D(2 ; 0) hoặc A(1 ; 1), B(2 ; 0), C(1 ; − 1), D(0 ; 0)

456. a) • $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{2}{k} = 1 \Rightarrow k = 2$

• Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \frac{2}{k} \neq 1 \Rightarrow k \neq 2$

• $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0, \overrightarrow{n_1} = (2 ; -1), \overrightarrow{n_2} = (k ; -1)$

$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 2k + 1$. Vậy $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$.

b) Trong trường hợp $(\Delta_1) \perp (\Delta_2)$ thì $(\Delta_2) : -\frac{1}{2}x - y - \frac{3}{2} = 0$

Toạ độ giao điểm của (Δ_1) với trục hoành : G(1 ; 0)

Toạ độ giao điểm của (Δ_2) với trục hoành : C(−3 ; 0)

Toạ độ giao điểm của (Δ_1) và (Δ_2) là : $H\left(\frac{1}{5} ; \frac{-8}{5}\right)$

Trên (d_2) lấy điểm B sao cho H là trung điểm của BC thì $B\left(\frac{17}{5} ; -\frac{16}{5}\right)$.

Phương trình đường thẳng (Δ_3) phải tìm đi qua $BC\left(\frac{17}{5} ; -\frac{16}{5}\right)$ và M(3 ; 0),

$(\Delta_3) : 16x + 2y - 48 = 0$

Đường thẳng $(\Delta_3) : 16x + 2y - 48 = 0 \Leftrightarrow 8x + y - 24 = 0$ chính là đường thẳng phải tìm.

Thật vậy $(\Delta_3), (\Delta_1)$ cắt nhau tại A có ΔABC, AH là trung tuyến đi qua G, ta lại có $CG = \frac{2}{3}CM \Rightarrow CM$ là trung tuyến nên MA = MB, (đpcm)

457. a) Phương trình đường thẳng qua hai điểm A, B :

$(\Delta_2) : 2x + 6y - 18 = 0$

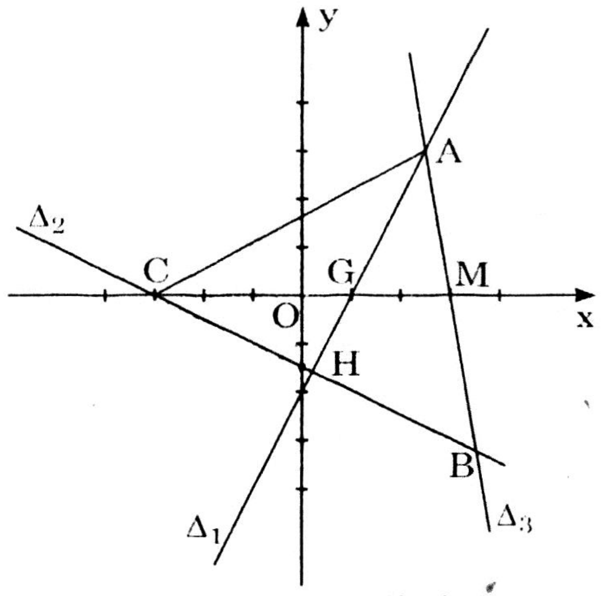
b) Phương trình đường thẳng Δ_3 qua A vuông góc với (Δ_1) ;

$(\Delta_3) : 2(x - 6) + 3(y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x + 3y - 15 = 0$

Tương tự $(\Delta_4) : 2x + 3y - 9 = 0$

$\Rightarrow \quad (\Delta_3)//(\Delta_4)$



Hình 60

458. 1. Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ nằm trên đường thẳng hoặc song song với đường thẳng đó gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng

Chẳng hạn đường thẳng $(\Delta): Ax + By + C = 0$ thì vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-B ; A)$

2. a) Phương trình của đường thẳng :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$$

b) Phương trình đường thẳng Δ qua điểm $A(1 ; -1)$ và có vectơ chỉ phương

$$\vec{u} = (3 ; -1) ; (\Delta) : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

c) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A)$

$$(AB) : \begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

459. $(\Delta) : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ nếu $a \neq 0, b \neq 0$

Nếu $a = 0$ thì (Δ) có phương trình tham số $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ và có phương trình tổng quát là $x = x_0$, không có phương trình chính tắc

Nếu $b = 0$ thì (Δ) có phương trình tham số $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 \end{cases}$ và có phương trình tổng quát $y = y_0$, không có phương trình chính tắc

460. $(\Delta) : 3x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (3 ; 4), \vec{u} = (-4 ; 3)$,

(Δ) đi qua điểm $A(-3 ; 2)$. Vậy phương trình tham số của (Δ) là

$$\begin{cases} x = -3 - 4t \\ y = 2 + 3t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

Phương trình chính tắc của (Δ) : $\dfrac{x + 3}{-4} = \dfrac{y - 2}{3}$

461. a) $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \end{cases}, \vec{u} = (-1 ; 2) \Rightarrow$ b) $\vec{n}(2 ; 1)$

462. a) Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$ và $x - 2y + 1 = 0$

Cách 1 : Đưa phương trình đường thẳng $x = 1 + 2t$, $y = -2 + t$ về phương trình tổng quát để xét vị trí tương đối như đã học.

Cách 2 : Thay $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$ vào phương trình $x - 2y + 1 = 0$:

$$1 + 2t - 2(-2 + t) + 1 = 0 \qquad (*)$$

- Nếu (*) vô nghiệm thì hai đường thẳng song song
- Nếu (*) có một nghiệm (đối với t) thì hai đường thẳng cắt nhau
- Nếu (*) vô số nghiệm (đối với t) thì hai đường thẳng trùng nhau.

Ở đây (*) : $0t + 6 = 0$ vô nghiệm, vậy $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$ song song với đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$

b) $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \begin{cases} x = k \\ y = 2 - 2k \end{cases}$

$-2x + y - 5 = 0$; $2x + y - 2 = 0$, ta có $\frac{-2}{2} \neq \frac{1}{1}$ nên hai đường thẳng cắt nhau.

Toạ độ giao điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -2x + y - 5 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-0,75 ; 3,5)$$

c) $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 4 + 3t \end{cases}, \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3}$, ta có : $\frac{-2 - t - 1}{4} = \frac{4 + 3t + 2}{3}$

$\Leftrightarrow -t - 3 = 3(2 + t) \Leftrightarrow 4t = -9 \Leftrightarrow t = -\frac{9}{4}$

Vậy hai đường thẳng cắt nhau tại $\left(\frac{1}{4} ; -\frac{11}{4}\right)$

463. $(\Delta_2) : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 7 - 2t \end{cases} \Rightarrow (\Delta_2) : 2x + y - 13 = 0$ $(\Delta_1) : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$

Ta có phương trình : $2(4 + t) + (2 - t) - 13 = 0 \Rightarrow t = 3$ thay vào (Δ_1) suy ra giao điểm của (Δ_1) và (Δ_2) là $(7 ; -1)$.

Phương trình đường thẳng chắn trên hai trục những đoạn thẳng bằng nhau :

$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow x \pm y - a = 0$

Đường thẳng này đi qua điểm $(7 ; -1)$ nên ta có

$$7 \pm (-1) - a = 0 \Rightarrow a = 6, a = 8$$

Vậy phương trình đường thẳng phải tìm là : $x + y - 6 = 0$, $x - y - 8 = 0$.

464. $C(x ; y)$ là giao điểm của (Δ_1) và (Δ_2), vậy $C(1 - t ; 2t)$, $C \in \Delta_2$ nên

$$1 - t + 3.2t - 3 = 0 \Leftrightarrow 5t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5}$$

Suy ra $C\left(\frac{3}{5} ; \frac{4}{5}\right)$

Gọi toạ độ $A = (x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$ mà $M(-1 ; 1)$ là trung điểm của AB nên $\begin{cases} x_A + x_B = -2 \\ y_A + y_B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -2 - x_A \\ y_B = 2 - y_A \end{cases}$

mà B nằm trên $(\Delta_2) \Rightarrow (-2 - x_A) + 3(-2 - y_A) - 3 = 0$

$$-x_A - 3y_A + 1 = 0$$

$$(\Delta_1) : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} \text{ mà } A \in (\Delta_1) \Rightarrow \frac{x_A - 1}{-1} = \frac{y_A}{2} \Leftrightarrow$$

$$2x_A + y_A - 2 = 0$$

Do đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} -x_A - 3y_A + 1 = 0 \\ 2x_A + y_A - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 1 \\ y_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = -3 \\ y_B = 2 \end{cases}$$

Vậy A(1 ; 0), B(−3 ; 2)

$$AH \perp BC \Rightarrow u_{AH} = \vec{n}_{BC} = (1 ; 3) \text{ và } A(1 ; 0)$$

Vậy $(AH) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

b) $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{18}{5} ; \frac{-6}{5}\right) \Rightarrow BC = \sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{-6}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$

$$AH = d(A, BC) = \frac{|1-3|}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC.AH = \frac{1}{2}.\frac{6\sqrt{10}}{5}.\frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{6}{5} \text{ (đvdt)}$$

465. Phương trình đoạn chắn có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow bx + ay = ab$

Viết dưới dạng tham số là : $\begin{cases} x = b - at \\ y = 0 + bt \end{cases}$

Vấn đề đặt ra là phải tìm a, b.

Theo giả thiết ta có : $\begin{cases} 8b + 6a = ab \\ |ab| = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{-6a}{8-a} \\ |ab| = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{-6a}{8-a} \\ a^2 = 4|a-8| \end{cases}$

$$a \geq 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 32 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$a < 8 \Rightarrow a^2 + 4a - 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = -8 \\ a_2 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow b_1 = 3, b_2 = -6$$

Vậy phương trình đường thẳng phải tìm là :

$$\begin{cases} x = 3 + 8t \\ y = 0 + 3t \end{cases} t \in \mathbb{R} \text{ và } \begin{cases} x = -6 - 4t \\ y = -6t \end{cases}$$

466. Dễ dàng có toạ độ trung điểm M của cạnh BC là $M\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ và

$(\Delta): x+y-2=0$.

Gọi $G(x_0;y_0)$ là trọng tâm của ΔABC, $G\in(\Delta)$ nên $x_0+y_0-2=0$

Phương trình đường thẳng $(BC): x-y-3=0$

Khoảng cách từ G đến BC là : $d(G, BC)=\dfrac{|x_0-y_0-3|}{\sqrt{2}}$

$$\overrightarrow{BC}=(-1;-1)\Rightarrow BC=\sqrt{2}$$

Do đó diện tích $\Delta GBC=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}.\dfrac{|x_0-y_0-3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}=\dfrac{1}{6}$

$$\Leftrightarrow |x_0-y_0-3|=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0-y_0-3=\frac{1}{3}\\ x_0-y_0-3=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Vậy ta có hai hệ phương trình sau :

$$\begin{cases}x_0+y_0-2=0\\ x_0-y_0-3=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=\frac{8}{3}\\ y_0=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_0+y_0-2=0\\ x_0-y_0-3=-\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=\frac{7}{3}\\ y_0=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

- $G\left(\frac{8}{3};-\frac{2}{3}\right)$, $M\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm cạnh BC, $A(x;y)$. Ta có :

$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GM}$ mà $\overrightarrow{AG}=\left(\frac{8}{3}-x;-\frac{2}{3}-y\right)$

$\overrightarrow{GM}=\left(\frac{3}{2}-\frac{8}{3};-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)$

Suy ra $\begin{cases}\frac{8}{3}-x=-\frac{7}{3}\\ -\frac{2}{3}-y=-\frac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\ y=1\end{cases}\Rightarrow A(5;1)$

Tương tự ta có $A(4;2)$

467. $(\Delta_1):\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -\dfrac{3}{16} + 3t \end{cases}$ có $\vec{u_1} = (4\,;3)$ và đi qua điểm $M_1\left(1\,;-\dfrac{3}{16}\right)$

a) $(\Delta_2)//(\Delta_1)$ nên có $\vec{u_2} = \vec{u_1} = (4\,;3)$ và đi qua $M_0\left(0\,;\dfrac{55}{16}\right)$ nên phương trình của $(\Delta_2):\begin{cases} x = 4t \\ y = \dfrac{55}{16} + 3t \end{cases}$

b) $(\Delta_3) \perp (\Delta_1)$ nên $\vec{n_3} = (4\,;3)$, (Δ_3) đi qua $M\left(0\,;\dfrac{55}{16}\right)$ nên phương trình của (Δ_3): $4x + 3\left(y - \dfrac{55}{16}\right) = 0$

$$4x + 3y - \frac{165}{16} = 0$$

c) Phương trình tổng quát của $(\Delta_1): 12x - 16y - 15 = 0$. Ta biết $(\Delta_1)//(\Delta_2)$

nên $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M_0, \Delta_1) \Rightarrow d(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{\left|-16\times\dfrac{55}{16} - 15\right|}{\sqrt{12^2 + 16^2}} = \dfrac{60}{20} = 3$ (đvd)

468. a) Phương trình đường thẳng AB là :

$$\frac{x+6}{-4+6} = \frac{y+3}{2+3} \Leftrightarrow 3x - y + 15 = 0\left(\overrightarrow{n_{AB}} = (3\,;-1)\right)$$

Phương trình đường thẳng AC là

$$\frac{x+6}{9+6} = \frac{y+3}{2+3} \Leftrightarrow x - 3y - 3 = 0\left(\vec{n}_{AC} = (1\,;-3)\right)$$

Ta có $\vec{n}_{AB}.\vec{n}_{AC} = 3 + 3 = 6 > 0$ nên phương trình đường thẳng (d) chứa phân giác của góc A :

$$\frac{3x - y + 15}{\sqrt{10}} = -\frac{3x - 3y - 3}{\sqrt{10}} \Rightarrow x - y + 3 = 0$$

b) Có hai trường hợp xảy ra :

- Nếu CP // AB mà (AB) : $3x - y + 15 = 0$, $n_{\overrightarrow{AB}} = (3\,;-1)$, nên

$$(CP): 3(x - 9) - 1(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 25 = 0$$

P ∈ (d) nên ta có toạ độ của P là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 3x - y - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow P(14\,;17)$$

- Nếu BP // AC, làm tương tự như trên ta tìm được P(2 ; 5)

469. Phương trình đường thẳng (AB) : $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow 4x + 3y - 7 = 0$

Giả sử $C(x\,;y)$. Theo giả thiết ta có : $x - 2y - 1 = 0$ (1)

$$d(C, AB) = 6 \Leftrightarrow \frac{|4x+3y-7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 4x + 3y - 37 = 0 & (2) \\ 4x + 3y + 23 = 0 & (3). \end{array}\right.$$

Giải hệ (1), (2) ta được $C_1(7\,;3)$

Giải hệ (1), (3) ta được $C_2\left(-\frac{43}{11}\,;-\frac{27}{11}\right)$

470. Ta đã biết đường tròn $(O\,;R)$ là tập hợp những điểm cách O cố định một khoảng R không đổi.

a) Vậy phương trình đường tròn tâm $O(a\,;b)$ bán kính R

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

b) Nếu tâm O là gốc toạ độ nghĩa là $O(0\,;0)$ thì phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 = R^2$.

471. $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \Rightarrow (x+A)^2 + (y+B)^2 = A^2 + B^2 - C$

Vậy đường tròn này có tâm $I(-A\,;-B)$, $R = \sqrt{A^2+B^2-C}$ (do $A^2 + B^2 - C > 0$)

472. $(C) : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$, vậy tâm $I(3\,;-1)$, $R = 2$

Đường thẳng (Δ) là một đường thẳng đi qua $M(5\,;1)$ có phương trình là :

$A(x-5) + B(y-1) = 0$ với $A^2 + B^2 \neq 0$.

Khoảng cách từ $I(3\,;-1)$ đến Δ là :

$$d(I, (\Delta)) = \frac{|-2A-2B|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{2|A+B|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Điều kiện để Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow \frac{2|A+B|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2$

$$\Leftrightarrow (A+B)^2 = A^2 + B^2 \Leftrightarrow 2AB = 0 \Leftrightarrow \text{hoặc } B = 0 \text{ hoặc } A = 0$$

- Nếu $A = 0$ chọn $B = 1$, được tiếp tuyến thứ nhất có phương trình là $y - 1 = 0$
- Nếu $B = 0$ chọn $A = 1$, được tiếp tuyến thứ hai có phương trình là $x - 5 = 0$.

473. Đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$, nên $I(1\,;-2)$, $R = 3$. Thay tọa độ điểm $M(1+\sqrt{5}\,;0)$ vào phương trình đường tròn ta có

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^2 + 0^2 - 2\left(1+\sqrt{5}\right) + 0 - 4 = 6 + 2\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5} - 4 = 0$$

Suy ra điểm $M \in (C)$, $\overrightarrow{IM} = \left(\sqrt{5}\,;2\right)$

Điều kiện để (Δ) đi qua M là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}$ là vectơ pháp tuyến của Δ và $M \in (\Delta)$, nên phương trình của (Δ) :

$$\sqrt{5}\left(x - (1 + \sqrt{5}\right) + 2y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5}x + 2y - \left(5 + \sqrt{5}\right) = 0$$

474. a) (C) : $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$

b) Toạ độ M, N là giao của (C) và $(\Delta) : x - 5y - 2 = 0$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13 \\ x - 5y - 2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(5y+2+1)^2 + (y-2)^2 - 13 = 0 & (1) \\ x = 5y + 2 & (2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y^2 + y = 0 \\ x = 5y + 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -1\end{array}\right. \\ x = 5y + 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 2 \\ y = 0\end{cases}, \begin{cases}x = -3 \\ y = -1\end{cases}$$

Vậy hai điểm là M(2 ; 0), N(–3 ; – 1).

Muốn có ΔMNP là tam giác nội tiếp thì ΔMNP vuông tại M (hoặc vuông tại N) nên NP là đường kính (hoặc MP là đường kính), vậy I(–1 ; 2) là trung điểm của NP, suy ra P = (1 ; 5).

Nếu ΔMNP vuông tại N thì MP là đường kính, tương tự ta có :

$$P = (-4 ; 4)$$

c) $M(2 ; 0) \in (C)$. Ta có phương trình tiếp tuyến của (C) qua điểm M là $(\Delta) : -3x + 2y + 6 = 0$

475. a) (C) : $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$

$I(3 ; -1), R = \sqrt{5}$

Giao điểm của (C) với trục hoành là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases}x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \\ y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 - 6x + 5 = 0 \\ y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1 \\ y = 0\end{cases}, \begin{cases}x = 5 \\ y = 0\end{cases}$$

Vậy A(5 ; 0), B(1 ; 0) (do $x_A > x_B$)

b) $\overrightarrow{IA} = (2 ; 1)$, $(\Delta) \perp IA$ nên nhận $\overrightarrow{IA}$ làm vectơ pháp tuyến, do đó nên phương trình của (Δ) : $2x + y + C = 0$

(Δ) tiếp xúc với (d) $\Leftrightarrow d(I, (\Delta)) = R$.

Do đó ta có : $\dfrac{|6 - 1 + C|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow C = 0, C = -10$

Hai đường thẳng phải tìm là $2x + y = 0$, $2x + y - 10 = 0$

476. $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0 \Leftrightarrow (\mathscr{C}) : (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

a) Tâm $I(2 ; -3), R = 5$

Khoảng cách từ $I(2 ; -3)$ đến $(\Delta) : 2x - y + m = 0$

$$d(I, (\Delta)) = \frac{|4 + 3 + m|}{\sqrt{5}}$$

- (Δ) cắt $(C) \Rightarrow d(I, (\Delta) < 5 \Leftrightarrow |7 + m| < 5\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow -5\sqrt{5} < 7 + m < 5\sqrt{5} \Leftrightarrow -7 - 5\sqrt{5} < m < -7 + 5\sqrt{5}$$

- (Δ) tiếp xúc với $C \Leftrightarrow |7 + m| = 5\sqrt{5} \Rightarrow m = -7 - 5\sqrt{5}$

  hoặc $m = -7 + 5\sqrt{5}$

- (Δ) không cắt (C) $|7 + m| > 5\sqrt{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m > -7 + 5\sqrt{5} \\ m < -7 - 5\sqrt{5} \end{array}\right.$

c) Gọi (Δ) là đường thẳng vuông góc với đường thẳng $y = x \Rightarrow y - x = 0$

$\Rightarrow (\Delta) : x + y + C = 0$

(Δ) là tiếp tuyến của $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d(I, (\Delta)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 - 3 + C|}{\sqrt{2}} = 5 \Leftrightarrow |C - 1| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 1 + 5\sqrt{2} \\ C = 1 - 5\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường thẳng (Δ) vuông góc với đường thẳng $y = x$ và tiếp xúc với $(\mathscr{C})$:

$$(\Delta_1) : x + y + 1 + 5\sqrt{2} = 0$$

$$(\Delta_2) : x + y + 1 - 5\sqrt{2} = 0$$

477. Giả sử ΔABC có $(AB) : \frac{x}{5} - y - \frac{2}{5} = 0$

$$(AC) : x - y + 2 = 0, \vec{n}_{AC} = (1 ; -1)$$

$$(BC) : x + y - 8 = 0, \vec{n}_{BC} = (1 ; 1)$$

Ta có $\vec{n}_{AC}.\vec{n}_{BC} = 1.1 + 1.(-1) = 0 \Rightarrow AC \perp BC \Rightarrow \widehat{C} = 90^o$

Toạ độ đỉnh A là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{x}{5} - y - \frac{2}{5} = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(-3 ; -1)$$

Toạ độ đỉnh B là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{x}{5} - y - \frac{2}{5} = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases} B(7 ; 1)$$

ΔABC vuông tại C nên cạnh huyền là AB. Tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trung điểm I của AB nên $x_I = \frac{7 + (-3)}{2} = 2$

$$y_I = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad I(2\,;0),\ R = IA = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC :

$$(x-2)^2 + y^2 = 26.$$

478. a) *Cách 1* : $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA} = (8\,;0)\\ \overrightarrow{OB} = (0\,;6)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 8.0 + 0.6 = 0$ nên $OA \perp OB$

Vậy ΔOAB vuông tại O. Đường tròn ngoại tiếp ΔOAB có tâm là I và bán kính $R = IA$.

Dễ dàng có $I = (4\,;3)$ và $R = IA = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

Do đó phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ ngoại tiếp ΔOAB :

$(\mathscr{C})$: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ hay $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

Cách 2 : Phương trình tổng quát của đường tròn $(\mathscr{C}_1)$:

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

$(\mathscr{C}_1)$ đi qua $O(0\,;0) \Rightarrow C = 0$

$(\mathscr{C}_1)$ đi qua $A(8\,;0) \Rightarrow 64 + 16A = 0 \Rightarrow A = -4$

$(\mathscr{C}_1)$ đi qua $B(0\,;6) \Rightarrow 36 + 12B = 0 \Rightarrow B = -3$

Do đó $(\mathscr{C}_1)$: $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

b) Phương trình cạnh (OA) : $y = 0$

Phương trình cạnh (OB) : $x = 0$

Phương trình cạnh huyền (AB) : $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow 6x + 8y - 48 = 0$

Phương trình đường phân giác của góc AOB : $x - y = 0$

$\vec{n}_{OB} = (1\,;0)$, $\vec{n}_{AB} = (6\,;8)$ $\vec{n}_{OB}.\vec{n}_{AB} = 6 > 0$, nên đường phân giác của góc B là : $x = -\frac{6x + 8y - 48}{10}$

$$\Rightarrow 16x + 8y - 48 = 0 \Rightarrow 2x + y - 6 = 0$$

Toạ độ tâm J là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow J(2\,;2)$$

Bán kính $R = d(J, OA) = 2$.

Vậy phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ nội tiếp ΔOAB :

$$(\mathscr{C}_2) : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

479. $(C_1) : x^2 + y^2 - 10x = 0 \Rightarrow (x-5)^2 + y^2 = 25$

$I_1(5 ; 0), R_1 = 5$

$(C_2) : x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$

$I_2(-2 ; 1), R_2 = 5$

a) Toạ độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7x - 10 \\ x^2 + y^2 - 10x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7x - 10 & (1) \\ x^2 + (7x-10)^2 - 10x = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (2)

$$(2) \Leftrightarrow 50x^2 - 150x + 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow y_1 = -3, y_2 = 4$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -3 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 4 \end{cases}$

Gọi M, N là hai giao điểm của (C_1) và (C_2) thì $M = (1 ; -3)$ $N = (2 ; 4)$.

Gọi (Δ) là đường trung trực của đoạn thẳng MN thì (Δ) có phương trình :

$$(\Delta) : x + 7y - 5 = 0$$

Tâm I của đường tròn đi qua MN và nằm trên đường thẳng (D) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + 7y - 5 = 0 \\ x + 6y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow I(12 ; -1)$$

$$R = IM = \sqrt{(-11)^2 + 2^2} = \sqrt{125}$$

Vậy phương trình đường tròn phải tìm là $(x - 12)^2 + (y + 1)^2 = 125$

b) Như trên ta đã có (C_1), $I_1(5 ; 0), R_1 = 5$

(C_2), $I_2(-2 ; 1), R_2 = 5$

- Xét $(\Delta) : x + c = 0$

Khoảng cách từ $I_1(5 ; 0)$ đến Δ : $d(I_1, (\Delta)) = |5 + c|$

Khoảng cách từ $I_2(-2 ; 1)$ đến Δ : $d(I_2, (\Delta)) = |-2 + c|$

Δ là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) $\Leftrightarrow \begin{cases} |5 + c| = 5 \\ |-2 + c| = 5 \end{cases}$ vô nghiệm

Xét (D) : $ax - y + b = 0$

Khoảng cách từ I_1 đến (D) : $d_1 = d(I_1, (D)) = \dfrac{|5a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Khoảng cách từ I_2 đến (D) : $d_2 = d(I_2, (D)) = \dfrac{|-2a - 1 + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(D) là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = R_1 \\ d_2 = R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{|5a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5 \\ \dfrac{|-2a - 1 + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$\text{(I)} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} |5a + b| = |-2a - 1 + b| \\ (5a + b)^2 = 25\left(a^2 + b^2\right) \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

$$\text{(II)} \quad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 5a + b = -2a - 1 + b \\ (5a + b)^2 = 25\left(a^2 + b^2\right) \end{cases} & \text{(I')} \\ \begin{cases} 5a + b = 2a + 1 - b \\ \left(5a + b\right)^2 = 25\left(a^2 + b^2\right) \end{cases} & \text{(II)'} \end{array} \right.$$

Giải (I') ta có $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{7} \\ b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{7} \\ b = -\dfrac{5}{84} \end{cases}$

Giải (I") ta có $\begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{2}{7} \\ b = \dfrac{10}{84} \end{cases}$

Vậy có 4 tiếp tuyến chung với (C_1) và (C_2)

$$-\frac{1}{7}x - y = 0 ; \quad -\frac{1}{7}x - y - \frac{5}{84} = 0$$

$$\frac{1}{3}x - y = 0 ; \quad \frac{2}{7}x - y - \frac{10}{84} = 0$$

Có thể viết gọn lại

$$x + 7y = 0 ; \quad 12x + 84y + 5 = 0$$

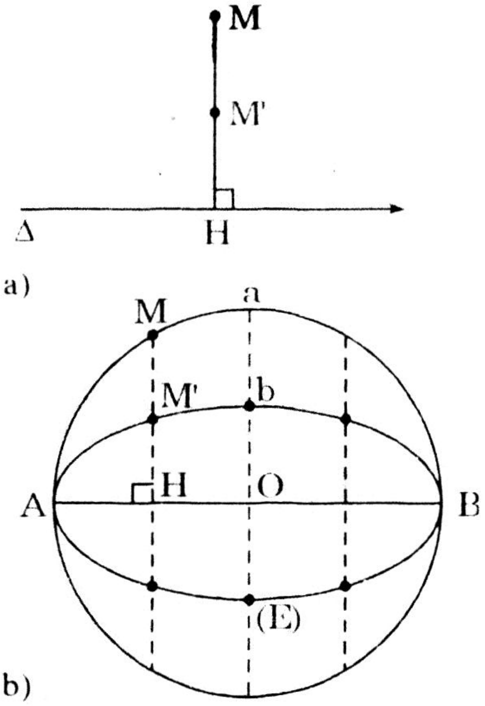
$$x - 3y = 0 ; \quad 12x - 42y + 5 = 0$$

480. a) Từ M kẻ $MH \perp (\Delta)$, $H \in (\Delta)$, lấy M' trên đoạn thẳng MH sao cho $MM' = kMH$ $(0 < k < 1)$

Phép đặt tương ứng điểm M' với điểm M như vậy gọi là phép co về đường thẳng Δ với hệ số k.

b) Đường elip là hình bằng phép co một đường tròn về một đường kính theo hệ số k $(0 < k < 1)$.

Hình 61b) là hình elip có được do co đường tròn tâm O về đường kính AB theo hệ số $k = \frac{1}{2}$.

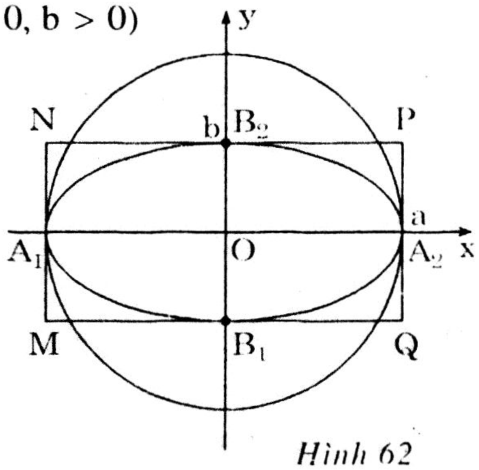


Hình 61

481. a) Phương trình chính tắc của (E)

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; (b^2 = k^2a^2, a > 0, b > 0)$$

b) Nhìn vào hình 62 ta thấy :



Hình 62

* (E) có hai trục đối xứng là trục tung và trục hoành

* Gốc toạ độ O(0 ; 0) là tâm đối xứng của (E)

* Các điểm $A_1(-a ; 0)$, $A_2(a ; 0)$ $B_1(0 ; -b)$, $B_2(0 ; b)$ gọi là đỉnh của (E)

* Đoạn thẳng A_1A_2 gọi là trục lớn của (E), đoạn thẳng B_1B_2 gọi là trục nhỏ của (E)

* Độ dài trục lớn bằng 2a, độ dài trục bé bằng 2b

* Hình chữ nhật MNPQ gọi là *hình chữ nhật cơ sở* của (E)

482. a) (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. Gọi $c > 0$ và $c^2 = a^2 - b^2$ thì hai điểm $F_1(-c ; 0)$, $F_2(c ; 0)$ gọi là tiêu điểm của (E)

b) Điểm $M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a$

c) Các khoảng cách MF_1, MF_2 gọi là bán kính qua tiêu của điểm M.

d) Độ dài đoạn thẳng F_1F_2 gọi là tiêu cự của (E)

Tâm sai e của (E) được tính theo công thức $e = \frac{c}{a}$ (đối với (E) thì $0 < e < 1$)

483. (E) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4, a = 5, b = 3$$

a) $F_1(-4 ; 0), F_2(4 ; 0) ; A_1(-5 ; 0), A_2(5 ; 0), B_1(0 ; -3), B_2(0 ; 3)$

b) Tiêu cự : 8, độ dài trục lớn : 10, độ dài trục nhỏ : 6

c) Đường chuẩn $(\Delta_1) : x = -\frac{a}{e}, e = \frac{c}{a} \Rightarrow x = -\frac{a^2}{c}$

Vậy $\quad (\Delta_1) : x = -\frac{25}{4}$; $(\Delta_2) : x = \frac{25}{4}$

484. (E) : $16x^2 + 25y^2 = 400 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 25, b^2 = 16 \Rightarrow c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3, a = 5, b = 4$

$F_1(-3 ; 0), F_2(3 ; 0), B_1(0 ; -4), B_2(0 ; 4)$. Vấn đề đặt ra là tìm diện tích tứ giác $F_1B_1F_2B_2$.

Dễ dàng thấy tứ giác $F_1B_1F_2B_2$ là hình thoi có các đường chéo $F_1F_2 = 6$, $B_1B_2 = 8$. Diện tích tứ giác $F_1B_1F_2B_2$ là :

$$S = \frac{1}{2}F_1F_2.B_1B_2 = \frac{1}{2}6 \times 8 = 24 \text{ (đvdt)}$$

485. a) $F_1\left(-\sqrt{3} ; 0\right), F_2\left(\sqrt{3} ; 0\right) \Rightarrow c = \sqrt{3}$

Theo phương trình đường chuẩn : $x = \frac{a^2}{c}$ mà (E) có đường chuẩn $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \frac{a^2}{c} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ mà $c = \sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 4$

Ta có $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 3 = 1$

Vậy phương trình chính tắc của (E) : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

b) $P = F_1M^2 + F_2M^2 - 3OM^2 - F_1M.F_2M. \qquad (*)$

Theo công thức tính đường trung tuyến : $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - a^2}$ (m_a là trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của ΔABC ; a, b, c theo thứ tự là độ dài ba cạnh của tam giác đối diện với ba góc A, B, C)

Trong ΔMF_1F_2 thì OM là đường trung tuyến, nên ta có :

$$OM^2 = \frac{1}{4}\left(2F_1M^2 + 2F_2M^2 - F_1F_2^2\right)$$

Thay vào biểu thức (*) ta có

$$P = F_1M^2 + F_2M^2 - \frac{3}{4}\left(2F_1M^2 + 2F_2M^2 - F_1F_2^2\right) - F_1M.F_2M$$

$$= -\frac{1}{2}\left(F_1M^2 + F_2M^2 + 2F_1M.F_2M\right) + \frac{3}{4}F_1F_2^2$$

$$= -\frac{1}{2}\left(F_1M + F_2M\right)^2 + \frac{3}{4}F_1F_2^2$$

Do $M \in (E)$ nên $MF_1 + MF_2 = 2a$, $F_1F_2^2 = 4c^2$

Vậy $P = -\frac{1}{2}.4a^2 + \frac{3}{4}.4c^2 = -2a^2 + 3c^2$

Ở đây $a^2 = 4, c^2 = 3 \Rightarrow P = -32 + 9 = -23$

c) Đường thẳng (d) song song với trục hoành có phương trình $y = m$

Toạ độ của hai điểm A, B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \\ y = m \end{cases} \Rightarrow A\left(-2\sqrt{1 - m^2}\ ; m\right), B\left(2\sqrt{1 - m^2}\ ; m\right)\ \left(|m| \le 1\right)$$

$$\overrightarrow{OA} = \left(-2\sqrt{1 - m^2}\ ; m\right), \overrightarrow{OB} = \left(2\sqrt{1 - m^2}\ ; m\right)$$

$$OA \perp OB \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow -4\left(1 - m^2\right) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(đều thoả mãn điều kiện $|m| \le 1$)

Vậy có hai đường thẳng (d) song song với trục hoành và cắt (E) tại hai điểm A, B và $OA \perp OB$

$$(d_1) : y = \frac{2}{\sqrt{5}}, (d_2) : y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

486. a) Phương trình chính tắc của (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$

E đi qua $P(-3 ; 1)$ và $Q\left(4 ; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{9}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1 \\ \dfrac{16}{a^2} + \dfrac{2}{9b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 18 \\ b^2 = 2 \end{cases}$$

Vậy (E) : $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

b) Phương trình chính tắc của (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(E) có tiêu điểm $F_1(-4\,;0)$ nên $c = 4$, (E) có độ dài trục lớn là 12 nên $2a = 12 \Rightarrow a = 6$.

Mặt khác $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 36 - 16 = 20$.

Vậy phương trình của (E) : $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{20} = 1$

Gọi M(x, y) là điểm phải tìm, ta có : $MF_1 = 3MF_2$ hay $MF_2 = 3MF_1$

$\Rightarrow (MF_1 - 3MF_2)(MF_2 - 3MF_1) = 0$

$\Leftrightarrow 16MF_1.MF_2 = 3(MF_1 + MF_2)^2$

$\Leftrightarrow 16(a + ex_M)(a - ex_M) = 12a^2$ (do $MF_1 + MF_2 = 2a$)

$\Leftrightarrow 4e^2x_M^2 = a^2 \Leftrightarrow x_M^2 = \dfrac{a^4}{4c^2}\left(e = \dfrac{c}{a}\right)$

$\Leftrightarrow x_M = \pm\dfrac{a^2}{2c}$, nên $x_M = \pm 4{,}5$

$\Rightarrow y_M = \pm\dfrac{\sqrt{63}}{12}$

Vậy có 4 điểm M thoả mãn điều kiện đề bài :

$$\left(4{,}5\,;\pm\dfrac{\sqrt{63}}{12}\right)\left(-4{,}5\,;\pm\dfrac{\sqrt{63}}{12}\right)$$

487. Những điểm M nhìn F_1F_2 dưới một góc vuông nằm trên đường tròn ($\mathscr{C}$) đường kính F_1F_2 tâm O, bán kính bằng $c = 2\sqrt{3}$

Phương trình đường tròn ($\mathscr{C}$) : $x^2 + y^2 = 12$

Điểm M lại thuộc (E) nên toạ độ của những điểm M là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{24} + \dfrac{y^2}{12} = 1 \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 24 & \Rightarrow y^2 = 12 \\ x^2 + y^2 = 12 & \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

nên $x = 0$

Vậy có hai điểm $M \in (E)$ nhìn F_1F_2 dưới một góc vuông $M_1\left(0 ; 2\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(0 ; -2\sqrt{3}\right)$

488. Toạ độ giao điểm E của (d_1) và (d_2) là nghiệm của **hệ phương trình** :

$$\begin{cases}(a-b)x + y = 1\\ \left(a^2 - b^2\right)x + ay = b\end{cases}$$

$D = \begin{vmatrix} a-b & 1 \\ a^2 - b^2 & a\end{vmatrix} = -b(a-b)$, theo giả thiết $b^2 = 4a^2 + 1$ **nên $a \neq 0, b \neq 0$**

và $a \neq b$ nên $D \neq 0$

$$Dx = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a\end{vmatrix} = a - b,\ Dy = \begin{vmatrix} a-b & 1 \\ a^2 - b^2 & b\end{vmatrix} = -a(a-b)$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} = -\dfrac{1}{b} \\ y = \dfrac{Dy}{D} = \dfrac{a}{b}\end{cases} \Rightarrow E = \left(-\dfrac{1}{b} ; \dfrac{a}{b}\right)$

b) Từ a) ta có $x^2 = \dfrac{1}{b^2}, y^2 = \dfrac{a^2}{b^2} \Rightarrow 4y^2 = \dfrac{4a^2}{b^2}$

$$\Rightarrow x^2 + 4y^2 = \frac{1 + 4a^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

Vậy tập hợp các giao điểm E của (d_1) và (d_2) khi a, b thay đổi là

$$(E) : x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

489. Giả sử tìm được điểm $B\left(x_B ; 0\right)$ thuộc đường thẳng $y = 0$ và điểm $C\left(x_C ; 8\right)$ thuộc đường $y = 8$, $AB = \sqrt{x_B^2 + 16}$, $AC = \sqrt{x_C^2 + 16}$ mà $AB = AC$

$$\Rightarrow x_B^2 + 16 = x_C^2 + 16 \Leftrightarrow \left(x_B - x_C\right)\left(x_B + x_C\right) = 0 \qquad (1)$$

$\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B ; 8), (BC) : 8x + (x_B - x_C)y - 8x_B = 0$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + 64},\ AH = d(A, BC) = \frac{|4(x_B - x_C) - 8x_B|}{\sqrt{64 + (x_B - x_C)^2}}$$

Ta có : $S = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}\sqrt{(x_B - x_C)^2 + 64}.\frac{4|(x_B + x_C)|}{\sqrt{64 + (x_B - x_C)^2}} = 24$

$\Rightarrow |x_B + x_C| = 12$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(x_B - x_C)(x_B + x_C) = 0 \\ |x_B + x_C| = 12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_B = 6 \\ x_C = 6\end{cases}, \begin{cases}x_B = -6 \\ x_C = -6\end{cases}$$

Như vậy ta có ΔABC với $A(0 ; 4), B(6 ; 0), C(6 ; 8)$ và $\Delta AB'C'$ với $A(0 ; 4)$, $B'(-6 ; 0), C'(-6 ; 8)$

Gọi G là trọng tâm của ΔABC, dễ dàng có $G = (4 ; 4)$

Gọi G' là trọng tâm của $\Delta AB'C'$, dễ dàng có $G' = (-4 ; 4)$

Đường thẳng (d) đi qua A, G có phương trình $y = 4$, điểm $G'(-4 ; 4) \in (d)$.

Vậy 3 điểm A, G, G' nằm trên đường thẳng (d) : $y = 4$.

490. a) $\vec{n}_{\Delta_1} = (1 ; -7), \vec{n}_{\Delta_2} = (1 ; 1)$, gọi α là góc tạo bởi (Δ_1) và (Δ_2) thì

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_{\Delta_1}.\vec{n}_{\Delta_2}|}{|\vec{n}_{\Delta_1}|.|\vec{n}_{\Delta_2}|} = \frac{|1.1 + 1.(-7)|}{\sqrt{50}\sqrt{2}} = \frac{6}{10} = 0,6$$

b) $d(M, \Delta_1) = \frac{|2 - 21 - 14|}{\sqrt{50}} = \frac{33}{5\sqrt{2}}$

$d(M, \Delta_2) = \frac{7}{\sqrt{2}}$

c) $\vec{n}_{\Delta_1}.\vec{n}_{\Delta_2} = 1 - 7 = -6 < 0$. Vậy đường phân giác của góc tù tạo bởi hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) là (D_1) :

$$\frac{x - 7y - 14}{\sqrt{50}} = -\frac{x + y + 2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x - 7y - 14 = -5(x + y + 2)$$

$\Leftrightarrow$ $6x - 2y - 4 = 0$ hay $(D_1) : 3x - y - 2 = 0$

Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) là (D_2) : $4x + 12y + 24 = 0$ hay $x + 3y + 6 = 0$

d) Muốn (Δ) tạo với (Δ_1) và (Δ_2) một tam giác cân đỉnh là giao điểm của (Δ_1) và (Δ_2) thì $(\Delta) \perp (D_2)$ mà (Δ) đi qua gốc toạ độ $O(0;0)$ nên (Δ) : $ax - y = 0$ mà $\vec{n}_D = (1;3), \vec{n}_\Delta = (a;-1) \Rightarrow \vec{n}_D.\vec{n}_\Delta = 0$

$\Rightarrow 1.a + 3.(-1) = 0 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow (\Delta) : 3x - y = 0$

Tương tự $(\Delta') \perp (D_1)$ và (Δ') đi qua gốc toạ độ $O(0;0)$ nên phương trình của (Δ') : $\frac{1}{3}x + y = 0$

Từ đó suy ra toạ độ các đỉnh của ΔABC : $A(0;-2)$ (toạ độ của điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - 7y - 14 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$)

Toạ đỉnh $B\left(-\frac{7}{10}; -\frac{21}{10}\right)$ (nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 7y - 14 = 0 \\ y = 3x \end{cases}$)

Toạ độ đỉnh $C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ (là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y = 3x \end{cases}$)

$S_{ABC} = \frac{1}{5}$ (đvdt)

Cùng làm tương tự ta được $\Delta AB'C'$, $A(0;-2)$, $B'(4,2;-1,4)$, $C'(-3;1)$

$$S_{ABC} = 7,2 \text{ (đvdt)}$$

491. a) Phương trình đường thẳng chứa cạnh :

$AB : 2x - 3y + 8 = 0$

$AC : x - 5y + 13 = 0$

$BC : x - 2y + 6 = 0$

b) Phương trình các đường cao :

$AH : 2x + y = 0$

$BH : 5x + y - 14 = 0$

$CH : 3x + 2y - 22 = 0$

c) Toạ độ trọng tâm $G\left(\frac{5}{3};\frac{11}{3}\right)$ (sử dụng công thức $x_G = \frac{1}{3}\left(x_A + x_B + x_C\right)$; $y_G = \frac{1}{3}\left(y_A + y_B + y_C\right)$

Toạ độ trực tâm H là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x + y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{14}{3};-\frac{28}{3}\right)$$

Gọi T_1 là đường trung trực của cạnh AB thì phương trình của (T_1) :

$$3x + 2y - \frac{19}{2} = 0$$

Gọi T_2 là đường trung trực của cạnh AC thì phương trình của (T_2) :

$$5x + y - 11 = 0$$

Toạ độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y - \frac{19}{2} = 0 \\ 5x + y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{25}{14};\frac{29}{14}\right)$

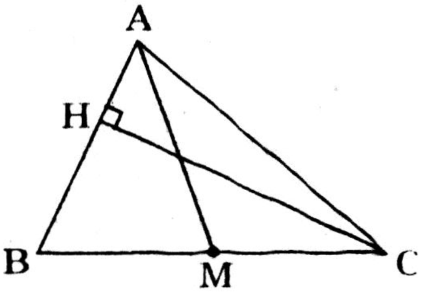
492. a) Giả sử toạ độ của $C(x ; y)$, $C \in CH$ nên tọa độ của C thỏa mãn phương trình

$2x - y + 3 = 0$, toạ độ của M :

$$x_M = \frac{2 + x}{2}, y_M = \frac{1 + y}{2}$$

$M \in AM$ nên ta có :

$$\frac{2 + x}{2} + \frac{1 + y}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0.$$



Hình 63

Vậy toạ độ của đỉnh C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$$

Phương trình đường thẳng chứa cạnh AB : $x + 2y - 4 = 0$

Toạ độ của điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow A(0 ; 2)$

Vậy toạ độ ba đỉnh của ΔABC : $A(0 ; 2)$, $B(2 ; 1)$, $C\left(-\frac{2}{3};\frac{-5}{3}\right)$

b) $AB = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $CH = d(C, AB) = \dfrac{\left|-\dfrac{2}{3} + \dfrac{10}{3} - 4\right|}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{3\sqrt{5}}$

Vậy $S = \dfrac{1}{2}AB.CH = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}.\dfrac{4}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2}{3}$ (đvdt)

493. $BH \perp AC$ ($BH : x - y = 0$), BH là đường cao của ΔABC, AC đi qua điểm $A(-1\,;-3)$ nên phương trình chứa cạnh AC : $x + y + 4 = 0$

Toạ độ đỉnh C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-5\,;1)$$

Toạ độ giao điểm M của đường cao BH và đường phân giác tại đỉnh C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = y \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$$

Khoảng cách từ M đến AC : $MH = d\big(M, AC\big) = \dfrac{\left|\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 4\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Gọi $B\big(x_0\,;y_0\big)$ là một điểm mà $B\big(x_0\,;y_0\big) \notin AC \Rightarrow x_0 + y_0 + 4 \neq 0$

$x_0 = y_0$ (vì B là giao của đường cao BH : $x = y$ và cạnh BC). Do đó phương trình đường thẳng chứa cạnh BC : $\dfrac{x+5}{x_0+5} = \dfrac{y-1}{x_0-1}$

$$\Rightarrow \quad (x_0 - 1)x - (x_0 + 5)y + 6x_0 = 0$$

Vì M nằm trên đường phân giác của góc C nên khoảng cách từ M đến BC bằng $MH = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{|3 + 6x_0|}{\sqrt{2x_0^2 + 8x_0 + 26}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_0^2 = 4$

$$\Rightarrow x_0 = \pm 2 \Rightarrow y_0 = \pm 2$$

$\begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -2 \end{cases}$ loại vì $(-2\,;-2) \in AC \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 2 \end{cases}$ là toạ độ của điểm B suy ra phương trình đường thẳng chứa cạnh BC :

$$x - 7y + 12 = 0$$

494. Phương trình đường tròn ($\mathscr{C}$) có dạng : $(x-1)^2+(y-3)^2=4$.

Vậy $I(1\,;3)$, $R=2$

a) $M(2\,;4) \Rightarrow IM=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}<2 \Rightarrow IM<R$ vậy điểm M nằm trong đường tròn ($\mathscr{C}$)

b) Ta có $\overrightarrow{IM}=(1\,;1)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng (AB) cần lập phương trình. Vậy (AB) : $x+y-6=0$

c) Ta đã biết hai đường tròn đối xứng nhau qua một đường thẳng là hai đường tròn có bán kính bằng nhau, nên chỉ cần tìm điểm I' đối xứng với I qua AB.

Gọi $I'\left(x_{I'}\,;y_{I'}\right)$ đối xứng với I qua AB, vậy M là trung điểm của II' nên

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x_{I'}+1}{2}=2 \Rightarrow x_{I'}=3\\ &\frac{y_{I'}+3}{2}=4 \Rightarrow y_{I'}=5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I'(3\,;5)$$

Do đó đường tròn ($\mathscr{C}$') đối xứng ($\mathscr{C}$) qua AB là : $(x-3)^2+(y-5)^2=4$.

495. a) Đường tròn ($\mathscr{C}_1$) có tâm $I(1\,;2)$, $R=IA=\sqrt{(3-1)^2+(-5-2)^2}=\sqrt{53}$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là

$$(\mathscr{C}_1):\ (x-1)^2+(y-2)^2=53$$

b) Đường tròn đi qua 2 điểm $A(1\,;3)$, $B(3\,;1)$ nằm trên đường thẳng (Δ) trung trực của đoạn thẳng AB :

Gọi $M(x\,;y)$ thuộc đường trung trực của đường thẳng AB thì $MA^2=MB^2$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=(x-3)^2+(y-1)^2 \Rightarrow y=x$

Toạ độ tâm I là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} y=x\\ 3x-2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow I(3\,;3)$$

Bán kính $R=IA=\sqrt{2^2+0}=2$

Vậy phương trình đường tròn phải tìm : ($\mathscr{C}_2$) : $(x-3)^2+(y-3)^2=4$

c) Phương trình đường tròn có tâm $I\left(x_0\,;y_0\right)$ có bán kính $R=5$ là ($\mathscr{C}_3$) :

$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=25$

$(\mathscr{C}_3)$ đi qua điểm $A(4;6)$ và có tâm nằm trên đường $2x + y - 4 = 0$, nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(4 - x_0)^2 + (6 - y_0)^2 = 25\\ 2x_0 + y_0 - 4 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0 = 1\\ y_0 = 2\end{cases}, \begin{cases}x_0 = -1\\ y_0 = 6\end{cases}$$

Vậy có hai đường tròn $(\mathscr{C}_3)$ thoả mãn đề bài :

$$(\mathscr{C}_3) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

$$(\mathscr{C}_3) : (x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 25.$$

496. a) Gọi toạ độ tiếp điểm B, C lần lượt là $(x_2 ; y_2), (x_3 ; y_3)$

Vậy tiếp tuyến tại hai điểm B, C theo thứ tự là :

$$x_2x + y_2y - r^2 = 0$$

$$x_3x_1 + y_3y_1 - r^2 = 0$$

Hai tiếp tuyến này đi qua $A(x_1 ; y_1)$ nên ta có :

$$x_2x_1 + y_2y_2 - r^2 = 0$$

$$x_3x_1 + y_3y_1 - r^2 = 0$$

Rõ ràng $(x_2 ; y_2), (x_3 ; y_3)$ là nghiệm của phương trình $x_1x + y_1y - r^2 = 0$

Vậy đường thẳng này đi qua hai điểm B và C, nên phương trình đường thẳng BC : $x_1x + y_1y - r^2 = 0$.

b) Ta xét ba trường hợp :

- (a) có phương trình $x = m \left(|m| > r\right)$. Khi đó đường thẳng BC : $mx + y_1y - \tau^2 = 0$, toạ độ điểm $A(m ; y_1)$

Rõ ràng BC đi qua điểm $\left(\frac{r^2}{m} ; 0\right)$

- (a) có phương trình $x = n \left(|n| > r\right)$ làm tương tự.

- (a) có phương trình $y = ax + b$. Đường thẳng này không cắt $(\mathscr{C})$ nên khoảng cách từ tâm $I(0;0)$ đến đường thẳng lớn hơn bán kính r. Vậy $\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + 1}} > r$

Khi đó đường thẳng BC : $x_1x + (ax_1 + b)y - r^2 = 0$.

Gọi $(x_0 ; y_0)$ là điểm cố định (nếu có) của đường thẳng BC thì ta có :

$$x_1(x_0 + ay_0) + by_0 - r^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 + ay_0 = 0 \\ by_0 - r^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{ar^2}{b} \\ y_0 = \dfrac{r^2}{b} \end{cases}$$

Vậy BC đi qua điểm cố định $\left(-\dfrac{ar^2}{b} ; \dfrac{r^2}{b}\right)$

497. a) $x^2 + y^2 + 2(m - 1)x - 2(m - 2)y + m^2 - 8m + 13 = 0$

$$\Leftrightarrow [x + (m - 1)]^2 + [y - (m - 2)]^2 = -m^2 + 8m - 13 + (m - 1)^2 + (m - 2)^2$$

$$= m^2 + 2m - 8$$

Muốn $(\mathscr{C}_m)$ là đường tròn thì $m^2 + 2m - 8 > 0 \Leftrightarrow m < -4$ hoặc $m > 2$

Tâm $I = (-m + 1 ; m - 2)$ hay $\begin{cases} x = -m + 1 & (1) \\ y = m - 2 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có $m = 1 - x$, thay vào (2) ta có $y = 1 - x - 2 \Rightarrow x + y + 1 = 0$

Vậy quỹ tích của tâm I của các đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ là đường thẳng $x + y + 1 = 0$.

b) $m = 4$ thì $(\mathscr{C}_4) : (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$

$$I(-3 ; 2), R = 4$$

Gọi (Δ) là tiếp tuyến kẻ từ $A(1 ; 5)$ đến $(\mathscr{C}_4)$:

- $(\Delta) : x - m = 0, d(I, \Delta) = |-3 - m| = 4 \Leftrightarrow m = 1, m = -7$

$m = -7$ (bị loại) vì (Δ) không đi qua $A(1,5)$.

Vậy $(\Delta) : x - 1 = 0$

- $(\Delta) : y = k(x - 1) + 5$

(Δ) là tiếp tuyến của $(\mathscr{C}_4) \Leftrightarrow d(I, \Delta) = 4 \Leftrightarrow \dfrac{|4k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 4$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{7}{24} \Rightarrow (\Delta) : y = -\frac{7}{24}(x - 1) + 5 \Rightarrow 7x + 24y - 127 = 0$$

Như vậy từ điểm $A(1\,;\,5)$ có hai tiếp tuyến với $(\mathscr{C}_4)$

$$x - 1 = 0 \text{ và } 7x + 24y - 127 = 0$$

498. $(E) : \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow c^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$

a) $F_1\left(-2\sqrt{5}\,;\,0\right)$, $F_2\left(2\sqrt{5}\,;\,0\right)$, $A_1(-6\,;\,0)$ $A_2(6\,;\,0)$

$B_1(0\,;\,-4)$ $B_2(0\,;\,4)$

b) Độ dài trục lớn $2a = 12$

Độ dài trục nhỏ $2b = 8$

c) $e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow e = \dfrac{2\sqrt{5}}{6} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

499. Phương trình chính tắc của (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. Biết $F_1\left(-\sqrt{5}\,;\,0\right)$, $F_2\left(\sqrt{5}\,;\,0\right) \Rightarrow c = \sqrt{5} \Rightarrow c^2 = 5 \Rightarrow a^2 - b^2 = 5$ (*)

(E) đi qua $B(0\,;\,2) \Rightarrow \dfrac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 4$ thay vào (*) ta có $a^2 = 9$. Vậy phương trình chính tắc của (E) : $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

500. 1) Dễ dàng nhận thấy $(D) \perp (D')$. Ta đã biết (E) có tâm đối xứng là gốc toạ độ, suy ra M, N đối xứng với nhau qua O nên $OM = ON$, $OP = OQ$ suy ra tứ giác MNPQ là hình bình hành, ta lại có $MN \perp PQ \Rightarrow$ MNPQ là hình thoi.

Toạ độ giao điểm M, N của đường thẳng (D) và (E) là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ ax - by = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad M\left(\frac{6b}{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}\,;\,\frac{6a}{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}\right);\, N\left(\frac{6b}{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}\,;\,-\frac{6a}{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}\right)$$

Tương tự ta có

$$P\left(\frac{6a}{\sqrt{4a^2 + 9b^2}}\,;-\frac{6b}{\sqrt{4a^2 + 9b^2}}\right);\, Q\left(-\frac{6a}{\sqrt{4a^2 + 9b^2}}\,;\,\frac{6b}{\sqrt{4a^2 + 9b^2}}\right)$$

$$S_{MPNQ} = 2OM.OP = \frac{72\left(a^2 + b^2\right)}{\sqrt{\left(9a^2 + 4b^2\right)\left(4a^2 + 9b^2\right)}} \quad (*)$$

2) Ta có phương trình của (D) và (D') là thuần nhất (đẳng cấp) đối với mọi a, b tức là thay a, b bằng ka, kb ($k \neq 0$).

Do đó có thể xem rằng $a^2 + b^2 = 1$. Khi đó (*) trở thành

$$S = \frac{72}{\sqrt{\left(4 + 5a^2\right)\left(4 + 5b^2\right)}} = \frac{72}{\sqrt{36 + 25a^2b^2}}$$

Vì $2|ab| \leq a^2 + b^2 = 1$ suy ra $a^2b^2 \leq \frac{1}{4}$ dấu "=" xảy ra khi $|a| = |b|$. Vậy

$$S \geq \frac{72}{\sqrt{36 + \frac{25}{4}}} \Rightarrow \min S = \frac{144}{13} \text{ khi } |a| = |b|.$$

MỤC LỤC

Trang

Phần I. **ĐỀ BÀI** 3

1. Mệnh đề. Tập hợp 3
2. Hàm số bậc nhất và bậc hai 8
3. Phương trình và hệ phương trình 13
4. Bất đẳng thức - Bất phương trình 20
5. Thống kê 33
6. Góc lượng giác và công thức lượng giác 38
7. Véc tơ 44
8. Hệ thức lượng trong tam giác và đường tròn 57
9. Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng 62

Phần II. **HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ** 72

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: NGUYỄN HƯNG
Trình bày bìa: NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

Đối tác liên kết xuất bản:
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

---

500 BÀI TOÁN CHỌN LỌC 10

Mã số: 1L - 352ĐH2009
In 1.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xí nghiệp in Đường Sắt Sài Gòn.
Số xuất bản: 1156 - 2009/CXB/05 – 220/ĐHQGHN, ngày 183/12/2009.
Quyết định xuất bản số: 352LK-TN/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2010.